



*В'ячеслав Андрійович Ясінський
(1957–2015)*

З любов'ю до людей та математики

*До 60-річчя від дня народження
В'ячеслава Андрійовича Ясінського*

Вінниця
ТОВ «Нілан-ЛТД»
2017

УДК 929Ясінський+378.6.011.3-057.175:51

ББК 22.1г.я43+74.58я43

З-11

Укладачі:

Панасенко О. Б., Матяш О. І., Воєвода А. Л., Калашніков І. В.,
Коношевський О. Л., Михайленко Л. Ф., Наконечна Л. Й.

З-11 З любов'ю до людей та математики... До 60-річчя від дня народження В'ячеслава Андрійовича Ясінського. — Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2017. — 252 с. : іл. 32 с.

Книга містить різні матеріали про творчий шлях Ясінського В'ячеслава Андрійовича (1957–2015) — ушанованого вчителя математики, заслуженого учителя України, доцента Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського; спогади про нього друзів, колег. Також у книзі зібрано 500 задач, автором яких є В. А. Ясінський, окремі його науково-методичні публікації.

УДК 929Ясінський+378.6.011.3-057.175:51

ББК 22.1г.я43+74.58я43

Комп'ютерна верстка: О. Панасенко

Дизайн обкладинки: Р. Рибаченко

Спонсор видання: Р. Мучнік

© ТОВ «Нілан-ЛТД», 2017

Передмова

31 січня 2017 року виповниться 60 років від дня народження Заслуженого вчителя України В'ячеслава Андрійовича Ясінського.

5 листопада 2015 року наш Друг, Вчитель, Наставник покинув земне життя, поринув у вічність. Для сім'ї, друзів, колег, учнів це невимовна втрата.

В'ячеслав Андрійович має значні заслуги перед українською математичною освітою: він є автором багатьох книг та статей з елементарної математики, видатним творцем олімпіадних математичних задач. До останнього дня В'ячеслав Андрійович працював доцентом кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Його професійний шлях — це взірць творчого горіння, вміння виявляти математичні здібності учнів і сприяти їхньому розвитку. Особистості такого рівня не помирають, тому що живуть їхні ідеї, праці, задачі; тому що стали успішними ті, кого він навчав математиці, мудрості, життю. Ім'я В'ячеслава Андрійовича Ясінського — щирої та життєрадісної людини, відомого у всьому світі композитора математичних задач, незрівнянного вчителя і викладача математики — назавжди залишиться у вдячній пам'яті колег, друзів, учнів, студентів, учителів.

Ця книга є спробою родини, учнів, друзів та колег вшанувати світлу пам'ять непересічної особистості, талановитого математика, неперевершеного вчителя. Родина та колектив кафедри алгебри і методики навчання математики висловлюють щире вдячність усім, хто сприяв підготовці і виданню цієї книги. Книга побачила світ завдячуючи випускникам 11-В класу 1991 року випуску фізико-математичної гімназії №17 міста Вінниці, друзям і колегам із Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського та фізико-математичної гімназії №17, побратимам в олімпіадному русі.

В'ячеслав Ясінський

Тернистий шлях олімпіад¹

Мої шкільні роки пройшли у тихому селищі Чернівці, яке розташовувалося на берегах річки Мурафа. Першими вчителями математики у мене були Котовський Федір Степанович та Назаровський Юхим Мойсейович. Мое сходження по етапам математичних олімпіад стрімко відбулося в 1974 році. До цього я не брав участі навіть в районній олімпіаді. Навчаючись у 10 класі, я став переможцем районної, обласної та республіканської олімпіад і був включений до складу республіканської команди на Всесоюзну олімпіаду. Вона відбулася у місті Єреван (Вірменія). Там я розв'язав лише одну геометричну задачу і отримав похвальний лист.

Мій виїзд за межі району відбувався під опікою завідувача кабінету математики обласного інституту підвищення кваліфікації вчителів Таєнчука Андрія Мусійовича. Саме він зіграв вирішальну роль у виборі мною для подальшого навчання фізико-математичного факультету Вінницького державного педагогічного інституту ім. М. Островського. У той час престижними були професії інженера-математика та інженера-програміста. Всі мої однокласники і знайомі поступали тоді до Вінницького політехнічного інституту.

Моє навчання в інституті проходило з 1975–1979 рік. Деканом факультету тоді був Войцеховський Андрій Прокопович, а його заступником Котенко Олександра Давидівна. Студентське життя проходило досить цікаво. На факультеті була традиційно хороша самодіяльність, я брав участь в ній. Тріо “Дубки”, в складі якого крім мене, виступали також Іщук Григорій та Гаркушевський Володимир, мало неабиякий успіх. У подальшому вихованці Григорія також були серед призерів Республіканської олімпіади. Володя тепер кандидат наук і навчає студентів на педагогічно-індустріальному факультеті нашого університету.

У той час студентські олімпіади проводилися лише серед студентів інституту, і майже з першого курсу я був серед їх переможців. Під

¹Ессе з книжки «Наш незабутній фізико-математичний факультет», присвяченої 90-річчю Вінницького державного педагогічного університету, 2002 рік.

час навчання я познайомився з такими студентами — переможцями студентських олімпіад, як Пасіхов Юрій Якович, Трофімчук Юрій Вікторович, Шастун Василь Федорович. Всі вони і тепер працюють вчителями математики і залишилися на все життя в олімпіадному русі. Їх учні неодноразово були переможцями і призерами фізико-математичних олімпіад різних рівнів, а самі вони є членами журі обласних олімпіад.

Добрим словом хочеться згадати викладачів факультету Глушкова Петра Миколайовича (математичний аналіз), Побережника Івана Юхимовича (алгебра), Карпенка Володимира Леонідовича (геометрія), Олонічева Павла Макаровича (сучасні основи шкільної математики) та фізиків Кучерука Івана Митрофановича, Бушка Григорія Федоровича, Грузмана Зіновія Наумовича, які сприяли моєму математичному зростанню. Особливий вплив на мене, як майбутнього вчителя математики і організатора учнівських олімпіад та підготовки до них учнів, мав Яровий Сергій Сергійович.

Після закінчення інституту я працював спочатку 3 роки в середній школі №1 м. Могилева-Подільського, а з 1982 року працюю в нашому інституті, а тепер університеті. За цей час я ніколи не переривав роботу в школі. Так, вісім років я працював у школі №15 та ще 5 років у фізико-математичній гімназії №17. Тепер працюю у ліцеї №7 м. Вінниці. Олімпіадний рух затягнув мене у свої ряди так, що зараз не уявляю свого життя без нього. За 25 років участі в олімпіадному русі маю певні досягнення як у підготовці учнів, так і в підготовці проведення самих олімпіад.

Починаючи з 1981 року був керівником команди області на Республіканських олімпіадах з математики, а з 1991 року — член журі Всеукраїнських олімпіад юних математиків. З 1996 року є відповідальним за підготовку членів команди України з геометрії до участі у Міжнародній математичній олімпіаді.

Багато моїх учнів, які успішно виступали на олімпіадах, стали математиками, фізиками, економістами та захистили кандидатські дисертації. Серед них: Томілов Юра (призер математичної олімпіади України, кандидат фізико-математичних наук), Віннічуки Саша та Ігор (призери математичної олімпіади України, Ігор — кандидат фізико-математичних наук, працює в США), Кирнасовський Олег (призер математичної олімпіади СРСР, кандидат фізико-математичних наук),

Козачко Саша (призер математичної олімпіади СРСР, закінчив мехмат МДУ, аспірант МДУ), Коваценко Стасік (призер математичної олімпіади України, закінчив мехмат МДУ, аспірант в США), Мучнік Рома (призер математичної олімпіади СРСР, докторант в США), Пилявський Павло (4 рази був призером Міжнародної математичної олімпіади: має одну бронзову, одну срібну та 2 золотих медалі), зараз навчається в одному з найпрестижніших університетів США — Масачусетському інституті технологій. На жаль, жоден з них не захотів обрати мій шлях — роботи з обдарованими учнями в нашій країні. Мабуть, це складно.

У той же час деякі випускники нашого факультету обрали цей шлях і проходять його зі своїми учнями. Це Нестюк Валентина Михайлівна (ФМГ №17), Збожинська Тетяна Станіславівна (ЗОШ №34), Кривошея Ігор Михайлович (ЗОШ №6), Пасіхов Петро Якович (ФМГ №17). Їх учні вже стали учасниками і переможцями Всеукраїнських олімпіад.

Березень 2001 року



- *1974 рік.* Перемога В'ячеслава Ясінського на районній, обласній та всеукраїнській олімпіадах школярів з математики.
- *1985 рік.* В. А. Ясінський нагороджений знаком «Відмінник народної освіти України».
- *1996–1999 рр.* Перемоги Павла Пилявського — учня В'ячеслава Андрійовича Ясінського — на Міжнародних математичних олімпіадах.
- *1998, 1999, 2002 рік.* В. А. Ясінський нагороджений Почесними Грамотами Міністерства освіти і науки України.
- *2000 рік.* В. А. Ясінський — переможець загальноміського конкурсу «Людина року–2000» в номінації «Працівник освіти року».
- *2001 рік.* В. А. Ясінському присвоєно звання заслуженого учителя України.
- *2005 рік.* В. А. Ясінському присвоєно вчене звання доцента кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.
- *2005 рік.* В. А. Ясінський нагороджений спеціальним сертифікатом оргкомітету Міжнародної математичної олімпіади за авторство значної кількості задач, які обирались до шортлистів Міжнародної математичної олімпіади.

Спогади про В. А. Ясінського

Катерина Ясінська

Життєпис В'ячеслава Андрійовича Ясінського

«Любов довготерпить, любов милосердствує,
не заздить, любов не величається, не надимається,
не поводитья нечемно, не шукає тільки свого,
не рветься до гніву, не думає лихого, не радіє
з неправди, але тішиться правдою, усе зносить, вірить
у все, сподівається всього, усе терпить! Ніколи любов
не перестає!...»

*Біблія, перше послання апостола Павла до коринтян,
улюблена цитата В'ячеслава Андрійовича*

В'ячеслав Андрійович Ясінський народився 31 січня 1957 року в селищі міського типу Чернівцях Вінницької області. Його мати Єфросинія Григорівна працювала фельдшером у лікарні. Одна виховувала двох дітей, допомагала їм здобути освіту, прищеплювала людяність, доброту, щирість.

Славко зростав серед чудової природи, любив бувати в бабусі в мальовничому селі Букатинці, досліджувати з друзями-однолітками скелясті урвища, порослі лісом, рибалити на берегах стрімкої річки Мурафи, милуватися місцевими краєвидами.

У дитинстві він навчився бачити і цінувати красу природи, розвинув кмітливість, допитливість.

З особливою теплотою він згадував дядька Порфирія, з яким разом рибалили, ходили в ліс по гриби, ловили ондатри. А після дозвілля дядько, який був каменярем, брався до роботи: вирізьблював на камені візерунки, надписи. Можливо, саме тоді, спостерігаючи за роботою майстра, і зародилося захоплення геометрією на все життя.

Також любив Славко бувати в майстерні дядька Семена, вчителя хімії і біології, який мав неабиякий хист до творчої роботи. Хлопець міг годинами спостерігати, як той займався художнім різьбленням по дереву, порався по господарству і з задоволенням слухав його настановчі філософські бесіди про життя.

В'ячеслав Андрійович любив згадувати своє дитинство і багато розповідав про нього.

Кажуть, що щаслива та людина, яка зустріне на своєму життєвому шляху справжнього Вчителя. Славку поталанило: вчитель математики Назаровський Ю. М. Чернівецької середньої школи №1, куди він перейшов на навчання в 9-ий клас, зумів запалити в його душі вогник любові до найскладнішої та найцікавішої науки — математики. Його мудра настанова: «Ти здібний, хлопче, але треба багато працювати» мотивувала до наполегливого вивчення математики, привела в сільську бібліотеку. В'ячеславом самотужки були опрацьовані всі шкільні підручники, посібники з елементарної та вищої математики, які були у фонді бібліотеки.

І результат не забарився: в 10 класі, здобувши перемоги на районній, обласній, республіканській олімпіадах, В'ячеслав узяв участь у Всесоюзній олімпіаді з математики в Єревані. Отримав диплом, приз — фотоапарат «Смена», який і досі зберігається в сімейному архіві. Але найголовніше — незабутні враження від спілкування з провідними фахівцями олімпіадного руху — науковцями та талановитими учнями — учасниками олімпіади. Це нагорода найвищого ґатунку для школяра.

Успіх окрилив, надихнув на сміливі мрії та привів після закінчення школи в Московський державний університет імені М. Ломоносова. Та не судилось. Успішна здача вступних іспитів, дипломи переможця олімпіад з математики були знівельовані співбесідою з «компетентними» працівниками: «Ви не прохідний, бо рідний дядько був в'язнем табору в Освенціумі в роки Великої Вітчизняної війни». Велике розчарування — не пройшов за конкурсом (непоодиноким випадок у Радянському Союзі — в елітні вищі був жорсткий відбір за ознакою благонадійності). Потім знову дивина: вступав до Вінницького технікуму електронних приладів — і знову не пройшов за конкурсом.

Повернувся додому, і, щоб не втрачати рік навчання, вступив до Мазурівського ПТУ №8 та здобув по його закінченні фах тракториста-машиніста 3-го класу. Відтоді в сім'ї запам'ятався жарт В'ячеслава Андрійовича: «Я — як Юрій Гагарін — починав свою освіту з ПТУ». Той рік був присвячений самостійному вивченню вищої математики за кращими посібниками найвідоміших науковців.

А наступного року шляхи вступної кампанії привели до Вінницького державного педагогічного інституту. Саме тут склалось все і одразу. Іспити були здані успішно, до вишу зарахували.

Завирувало насичене студентське життя. Першокурсник В'ячеслав мав чудову математичну підготовку, відзначався надзвичайними прагненнями до нових знань, до всебічної освіти.

Мотивували, заохочували до навчання чудові викладачі, талановиті педагоги Грузман М.З., Малінковський Б.В. (з ними познайомився ще на підготовчих курсах), Побережник І.Ю., Власенко О.І., Кулик В.Т., Тарасова Л.З., Олонічев П.М., Волошина В.Я., Глушков П.М., Сиваківський Б.Я. та багато інших, а також, звичайно ж, декан Войцехівський А.П. — улюбленець усіх студентів.

Значний вплив на формування професійного рівня В'ячеслава мав викладач-методист від Бога Яровий Сергій Сергійович: блискучі лекції, особливий стиль оформлення конспектів та розв'язань задач, незрівнянна харизма. То була наука на все життя.

Багато часу із студентами наші викладачі проводили і в позанавчальний час. Складались товариські стосунки. Пам'ятаю, як В'ячеслав познайомив мене із Сергієм Сергійовичем. За невимушеною бесідою «С.С.» (як його називали поза очі студенти) провів зі мною «тестування» (на рівень розумових здібностей) і підсумував: «Люди сходяться за подібністю — ви будете разом». Так і склалось.

Низький уклін усім нашим викладачам за ґрунтовні знання, життєві настанови, глибинний зміст яких ставав більш зрозумілим з часом, з набуттям власного життєвого досвіду!

Цікавим і насиченим було студентське життя і за межами навчальних аудиторій. З першого курсу Славко був активним учасником художньої самодіяльності — чудового інститутського хору під керівництвом М.Плашкевича, ансамблю народних інструментів, де грав на козобасі, а також тріо гітаристів «Дубки» (шалене захоплення дівчат). Виступали на

всіх інститутських та факультетських заходах, концертах, КВК, виїзних концертах у місті та області. Артистам особливо подобалось виступати у вишиванках і, безперечно, незабутніми були щедрі частування після концертів не дуже ситих в той час студентів.

А влітку на канікулах організовувались студентські будівельні загони. Для В'ячеслава це була можливість як здобути будівельну підготовку, так і заробити значну суму коштів для допомоги мамі та купити обновки собі.

Незабутні, щасливі студентські роки. Хоча матеріально було сутужно, навчались із задоволенням, весело проводили час, любили, дружили, мріяли, співали.

Ще в студентські роки В'ячеслав захопився розв'язуванням задач підвищеної складності, які друкувались у журналах «Математика в школі», «У світі математики», «Квант» та ін. і проніс це захоплення через усе життя.

По закінченні Вінницького державного педагогічного інституту імені М. Островського вступив заочно до аспірантури Львівського політехнічного університету, одружився та почав свою педагогічну діяльність вчителем математики та продовженого дня в Могилів-Подільській середній школі №1.

З самого початку викладацької діяльності визначив для себе головний пріоритет — робота з обдарованими учнями. В'ячеслав Андрійович пройшов всі сходинки цього шляху: підготовка учнів до олімпіад, робота у складі журі всіх етапів, супровід учнівських команд на міські, обласні, Всеукраїнські олімпіади, робота заступником голови журі та експертом-консультантом Всеукраїнських олімпіад і турнірів юних математиків, Соросівських олімпіад, робота головою журі з математики на Всеукраїнській комплексній олімпіаді з математики, фізики, інформатики «Турнір чемпіонів», на олімпіадах Рішельєвського ліцею в м. Одесі, Міжнародному Турнірі Міст, був у складі журі Всеукраїнської олімпіади для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів.

Та найголовнішим на цьому зірковому і тернистому сходженні вважав надбання великої когорти друзів, товаришів, соратників, колег та однодумців.

Найближчі з них: Лейфура В. М. — заслужений учитель України, професор Чорноморського державного університету імені Петра Могили, кандидат фізико-математичних наук; Мітельман І. М. — заслужений учитель України, доцент, кандидат фізико-математичних наук, заступник директора Рішельєвського ліцею при Одеському національному університеті; Радченко В. М. — заслужений учитель України, професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук. 23 роки плідної співпраці з'єднали в щирій дружбі споріднені душі, які живуть справою свого життя. Участь у підготовці та проведенні Всеукраїнських олімпіад і турнірів, Соросівських олімпіад, відборах та підготовці учнів до міжнародних олімпіад з математики, написання у співавторстві низки навчально-методичних посібників — далеко не повний перелік спільної діяльності.

Я достеменно знаю, скільки титанічної праці, зусиль, часу, життєвої енергії віддано ними в справі плекання інтелектуальної еліти країни, з якою неймовірною працездатністю, наполегливістю, самовіддачею і ентузіазмом вони працювали і творили.

Моя безмежна шана і вдячність найближчим друзям і соратникам В'ячеслава Андрійовича!

Професійна діяльність подарувала радість співпраці і спілкування з працівниками наукових, освітянських, видавничих установ різних міст нашої країни і зарубіжжя. Серед них — Швець В. О., Працьовитий М. В., Кременський Б. Г., Борисова В. О., Литвиненко О. А., Гунько Л. В., Соколовська І. С., Маліс С. І., Чадаєв О. М., Сігетій І. П., Петечук В. М., Добосевич М. С., Добосевич А. С., Кукуш О. Г., Михайловський В. І., Нагель І. П., Перестюк М. О., Рабець К. В., Рябуха О. З., Теплінський О. Ю., Федак І. В., Харік О. Ю. і багато-багато друзів та колег-однодумців. Вибачте, що назвала не всіх.

Думаю, пощастило ще в тому, що початок професійної діяльності Ясінського В. А. припав на часи розквіту освітянської творчості в країні — це були часи створення авторських шкіл, методик викладання, розгалужений обмін передовим педагогічним досвідом на конференціях, семінарах, лекціях кращих педагогів.

Крім традиційних форм роботи з обдарованими учнями, існували конкурси з розв'язування задач журналів «Математика в школі», «У світі математики», «Квант», навчання в заочних математичних школах

провідних вишів, заочна телевізійна математична олімпіада. Це розмаїття методів вдало використовував В'ячеслав Андрійович. Не давало спокою прагнення до вдосконалення.

У 1982 році сім'я переїхала у Вінницю, де В'ячеслав Андрійович працював в СШ №15, потім, у наступному 1983 році був зарахований на посаду старшого викладача у Вінницький державний педагогічний інститут, на факультет учителів початкових класів, а з 1991 року був переведений на посаду старшого викладача кафедри алгебри і методики викладання математики. З 2003 року працював на посаді доцента цієї кафедри пожиттєво.

Саме тут, завдячуючи творчій атмосфері, напрочуд доброзичливим та товариським взаєминам, В'ячеслав Андрійович реалізовував свої науково-педагогічні прагнення. Подобалось все: викладацька, науково-дослідницька робота, спілкування з допитливими студентами. Особливе задоволення приносили співпраця і товариські стосунки з дорогими його серцю колегами: Матяш О.І. (завідувач кафедри), Куликом В.Т., Побережником І.Ю., Рокіцьким І.О., Гарвацьким В.С., МIRONЮКОМ М.В., КАЛАШНІКОВИМ І.В., Михайленко Л.Ф., Коношевським О.Л., Воєводою А.Л., Панасенком О.Б., Наконечною Л.Й. — когортою творчих викладачів-науковців, які своєю невтомною подвижницькою працею розбудовують національну педагогічну науку в умовах реформування вищої та середньої освіти, готують генерацію майбутніх учителів.

Панасенко О.Б. був студентом В'ячеслава Андрійовича, а ставши колегою, поділив його захоплення роботою з обдарованими учнями, розпочав разом торувати шляхи олімпіад і турнірів для школярів, видавати у співавторстві навчально-методичні посібники. Наразі Олексій Борисович — наступник і продовжувач усіх його олімпіадних починань.

Більше двох десятиріч В'ячеслав Андрійович співпрацював з колегами Вінницького обласного інституту післядипломної освіти педагогічних працівників. Брав активну участь у підготовці і проведенні районних, обласних олімпіад, читав лекції на курсах підвищення кваліфікації вчителів математики, конференціях, семінарах, випустив багато методичних збірок. Його знали всі вчителі математики в області, і кожен міг звернутись у будь-який час за методичною консультацією. Співпрацював також з інститутами вдосконалення учителів інших областей країни.

Протягом довгого часу з початку роботи в педінституті до 2003 року В'ячеслав Андрійович працював за сумісництвом в школі №18, фізико-математичній гімназії №17, школі-ліцеї №7 м. Вінниці.

Особливо творчою і результативною була робота в фізико-математичній гімназії №17. ФМГ №17 — це талановитий колектив однодумців, який створює умови для реалізації творчих здібностей учнів та вчителів, гарантуючи високу якість освіти. Пріоритетним напрямком діяльності закладу завжди була саме робота з обдарованими учнями, участь в олімпіадах, турнірах, конкурсах. Працювати у ФМГ №17 як вчителю Ясінському В. А. було найцікавіше, в стінах цієї школи його потенціал розкрився якнайкраще.

Пригадую, саме в ті роки творчі педагоги об'єднались у вчительський гурток, де обговорювали професійні питання, розв'язували задачі підвищеної складності з фізики. Вчителі Пасіхов Ю. Я., Власов Д. М., Яковенко М. П., Скрипник А. В., Іщук Г. Г., Войтович Ю. Я., Солоненко В. І. (викладач ВДПУ) на щомісячних зібраннях отримували складні задачі з журналу «Квант» для розв'язування, потім обговорювали розв'язки, а особливо складні задачі розв'язували разом. Така колективна вчительська творчість сприяла розвитку професійних компетенцій учителів та рівня знань їхніх учнів.

І досі вражають ентузіазм і насага педагогів, які, незважаючи на свої життєві обставини, надто помірні заробітні платні, виплати яких у складних 90-х роках затримували подекуди на кілька місяців, не шкодуючи особистого часу, захоплено віддавались улюбленій справі.

Особливо плідні професійні та по-щирому дружні стосунки у В'ячеслава Андрійовича склались з Нестюк В. М. (нині директор ФМГ №17), з якою викладали математику в одних класах та підготували велику когорту переможців математичних олімпіад усіх рівнів. Валентина Михайлівна навчала математики і була класним керівником нашої доньки Наталі.

Найбільш мотивуючою і цікавою як вчителя математики була для В'ячеслава Андрійовича співпраця з вчительською династією фізико-математичної гімназії №17 — родиною Пасіхових. А познайомились ще під час навчання у педінституті. На комплексній олімпіаді з математики, фізики та інформатики «Турнір чемпіонів», організатором, координатором і головою журі якої є Юрій Якович Пасіхов, В'ячеслав

Андрійович був незмінним головою журі з математики. Читав лекції в літньому таборі для обдарованих дітей разом, провели багато різноманітної роботи на освітянських заходах. З Петром Яковичем Пасіховим — керівником методичного об'єднання вчителів математики міста — спільно працювали на олімпіадах, проводили велику методичну роботу з вчителями міста. Ліліана Василівна Гончарук — заступник директора ФМГ №17 з науково-методичної роботи — систематично залучала до проведення різноманітних методичних заходів для вчителів гімназії.

Це лише деякі аспекти спільної педагогічної діяльності впродовж десятиріч. А ще сюди, у фізматгімназію, приводив кращих студентів на практику. І просто, проходячи повз школу, обов'язково заходив поспілкуватись з щирими друзями. Був у постійному телефонному зв'язку.

Разом працювали, дружили, раділи успіхам та професійно збагачували один одного, підтримували в складних життєвих обставинах. З теплотою і вдячністю я згадую роки своєї роботи і навчання наших дітей у ФМГ №17.

Вершиною всієї професійної діяльності вчителя — були успіхи його учнів. Скільки їх — талановитих, допитливих, працелюбних і чудових наших квітів життя — пройшло через його серце і розум!

Особлива, унікальна історія про легендарного Пашу Пилявського. Доля звела їх під час проведення обласної олімпіади. В'ячеслав Андрійович дивним чином вирізняв його з великої кількості учасників. Паша на той час навчався у 5 класі. В'ячеслав Андрійович знайшов його вчительку математики і через неї запросив Пашу з мамою на зустріч. І вже після першого спілкування впевнено повідомив мамі: «Ваш син поїде на Міжнародну олімпіаду з математики!». Почалась багаторічна спільна плідна праця. За короткий час, завдяки надзвичайним здібностям і працездатності, Павло опанував усю шкільну програму з математики і почав посилено займатись підготовкою до олімпіад. Працювали в школі, на гуртках і факультативах, вдома та в інституті з В'ячеславом Андрійовичем у навчальний та канікулярний час. Вчили теорію, розв'язували відомі та складали нові задачі разом.

І вже у 8 класі, виборовши перемоги на всіх турах Всеукраїнської олімпіади, пройшовши відбір, Павло вперше в 1996 році поїхав на

Міжнародну олімпіаду з математики в Індію. І відразу успіх — бронзова медаль. Потім, ще за три роки поспіль участі в Міжнародних олімпіадах у загальному заліку 4 перемоги — 1 бронзова, 1 срібна, 2 золоті медалі. Чотири медалі в одного учня — один з найкращих у світовій історії Міжнародних олімпіад результат, де участь беруть учні лише випускного класу, адже рівень задач передбачає поглиблені знання всього курсу шкільної математики. А ще в заліку Павла — перемоги на трьох Соросівських олімпіадах, багатьох Всеукраїнських олімпіадах та турнірах, обласних, міських олімпіадах з математики.

Паша також був багаторазовим переможцем Всеукраїнських предметних олімпіад різних рівнів з багатьох інших предметів. Закінчив школу із золотою медаллю.

Безмежно талановитий і працелюбний у навчанні, Павло вирізнявся непересічними людськими якостями, чемністю, порядністю, доброзичливістю і надзвичайною скромністю.

За роки спільної праці у Павла з В'ячеславом Андрійовичем склались напрочуд теплі особисті взаємини — чудово розуміли і відчували один одного, знали вподобання, помисли та мрії — серця їх бились в унісон.

Пригадується і курйозний випадок. Коли Павло вперше отримав приз Соросівської олімпіади за перше місце — комп'ютер (дивина на той час), він півроку зберігався запакований вдома у В'ячеслава Андрійовича — не було часу в Паші відволікатись на освоєння комп'ютера, бо треба було готуватись до участі в наступних олімпіадах. І вже влітку під час канікул перевезли комп'ютер додому до Павла — на велику його втіху!

Після закінчення школи Паша блискуче здав міжнародні тестування з математики, фізики, англійської мови. Враховуючи також його численні дипломи різноманітних олімпіад, був запрошений на навчання до Масачусетського технологічного університету в США — одного з найпрестижніших вишів світу (в першій топ-п'ятірці).

Сьогодні Павло Пилявський — професор математики університету Мінесоти (США), має наукові праці в найскладніших розділах вищої математики.

В'ячеслав Андрійович надто пишався і радів успіхам і перемогам Павла. В його портфелі завжди були копії його дипломів з Міжнародних олімпіад, а в кабінеті на почесному місці висить одна із золотих медалей, подарованих Пашею, на книжкових полицях — тека із збірками його

розв'язків усіх задач з Міжнародних олімпіад, і окрема тека — «Задачі Паші Пилявського».

І перший комп'ютер В'ячеслава Андрійовича був подарований Павлом — один з його призів на Соросівських олімпіадах.

Весь час його перебування і навчання в Америці (майже 20 років) і до останнього дня вони листувались, спілкувались в Skype, розв'язували складні і складали нові задачі, які ввійшли до бази олімпіадних задач В'ячеслава Андрійовича. Звичайно, обмінювались викладацьким досвідом, розмірковували про життя.

А ще ми полюбляли переглядати разом Пашині родинні світлини.

На жаль, не встиг учитель розділити з Павлом його найщасливішу мить — народження донечки Софійки.

Зворушлива історія Вчителя і Учня, яких об'єднала велика любов до математики, поділена на двох та помножена на роки спільної плідної титанічної праці.

Про учнів В'ячеслава Андрійовича можна писати окрему книгу.

На самому початку роботи в школі він багато додатково працював з учнями своїх класів. З часом батьки та вчителі стали приводити до нього дітей, зацікавлених математикою, з усього міста. Подекуди і він сам запрошував до співбесіди і співпраці учнів, які виявили свої здібності на олімпіадах. Потім працював з обдарованими дітьми з різних міст України, а з появою Інтернету використовував для цього можливості дистанційного навчання.

Учні В'ячеслава Андрійовича переходили в школи, де він працював. А при зміні (за сімейними обставинами) місць роботи вчителя, переводились в його школу разом з ним. Головною вважав думку Сухомлинського: «Діти — це маленькі паростки таланту, що перетворюється на міцне дерево на благодатному ґрунті працьовитості». Тому прищеплював учням переконання, що саме працелюбність і цілеспрямованість у досягненні мрій — ті зерна, які дають найкращий урожай.

Учитель завжди цікавився вподобаннями та мріями, життєвими обставинами та турботами учнів. Разом з батьками опікувався створенням належних умов для ефективного навчання своїх учнів удома і в школі. Допомігав у вирішенні виникаючих питань своїм учням і навіть дівчатам, з якими вони дружили (думаю, щоб дівчата не дуже заважали в підготовці до олімпіад його обдарованим учням).

Добрі, товариські та дружні взаємини складались із батьками учнів на довгі-довгі роки — робили спільну справу, плекали таланти.

Серед кращих, улюблених учнів — Матохнюк Т., Рвачов М., Мучнік Р., Джосюк С., Рабинер О., Сахарова А., Беломоїн Г., Польгуль С., Рокіцький Р., Коваценко С., Костюк С., Ошовський В., Аккерман В., Каніковський О., Кирнасовський О., брати Козачки, брати Козумляки та багато-багато інших. Хіба можна всіх перелічити за майже два десятиріччя роботи!

Учні В'ячеслава Андрійовича здобували вищу освіту в кращих вишах країни і світу. Стали класними фахівцями різних професій: науковці, викладачі, працівники ІТ-сфери, лікарі, фінансисти та ін. та досягли вагомих успіхів та результатів у сферах своєї діяльності.

Вдячні учні і по закінченні школи не припиняли зв'язки з учителем — спілкувались, зустрічались, приходили в гості, привозили і дарували фахову літературу, допомагали видавати математичні посібники (Мучнік Роман) і, звичайно ж, приводили на навчання своїх власних дітей.

В'ячеслав Андрійович часто згадував своїх вихованців і надто пишався їхніми успіхами і досягненнями.

Він був незаперечним авторитетом і щиро ними шанований, бо не тільки зумів залучити до прекрасного світу математики, а й сформував переконання: особистість формується наполегливою, кропіткою працею, цілеспрямованістю та широтою інтересів.

Найпочесніше місце у серці В'ячеслава Андрійовича зайняв 11-В клас фізико-математичної гімназії №17 1991 року випуску, в якому класним керівником заслужений учитель України Власов Д. М.

У фізико-математичній гімназії (на той час вона мала статус школи з класами з поглибленим вивченням фізики) на посаді вчителя математики за сумісництвом В'ячеслав Андрійович почав працювати у 1989 році. Перейшов з «непорожніми руками». За вчителем до нового місця навчання перейшла когорта його учнів із СШ №15 і СШ №18, у яких до цього працював і які поділяли його захоплення математикою, олімпіадами. Крім цього, прийшли два «сильні» учні з СШ №6, вчитель математики яких улітку виїхав на ПМП за кордон, прийшли навчатись до гімназії «на вчителя». Не слід забувати, що всі ці учні теж потрапили у зовсім незвичайний клас — це спеціалізований клас

з поглибленим вивченням фізики. Учні цього класу вже були неодноразовими переможцями міських, обласних та республіканських олімпіад з фізики, математики та інформатики. Маючи велике навантаження в педагогічному інституті, В'ячеслав Андрійович у цьому класі викладав лише геометрію, алгебру викладала Нестюк Валентина Михайлівна, фізику — заслужений вчитель України Власов Дмитро Михайлович, інформатику — заслужений вчитель України Пасіхов Юрій Якович. Під керівництвом творчо і натхненно працюючих майстрів педагогічної справи обдаровані учні наполегливо і захоплено оволодівали знаннями на уроках, факультативах, гуртках та в позанавчальний час.



Учні 11-В класу ФМГ №17 1991 року випуску та вчителі на святі останнього дзвоника

Надзвичайна зацікавленість в навчанні, середовище змагальності, мотивованість та амбітність учнів цього класу задавала потужний рівень навчання, взаємовідносин та взаємозбагачення. Талановиті і цілеспрямовані, самодостатні і харизматичні, з великою жагою до знань — саме такі учні трансформують працю вчителя в мистецтво. Можна багато написати про унікальність учнів цього класу, пригадувати різні ситуації із шкільного життя, дещо описано ними у відгуках у цій книзі. Пригадуються не лише навчальні і олімпіадні успіхи високого рівня з різних предметів, а і як чудово співали у шкільному хорі під

керівництвом талановитої Воскобойник І. І., брали участь в агітбригаді, були учасниками шкільної команди КВК. А ще був літній трудовий табір із збором ягід, незабутні туристичні походи класу.

Гордість В'ячеслава Андрійовича і всього колективу школи — Мучнік Р., Рвачов М., Джосюк С., Коваценко С., Козачко О., Рокіцький Р., Беломоїн Г., Польгуль С., Сахарова А., Рабінер О., Ведрашко О. та багато інших учнів успішно закінчили школу, вступили до кращих вузів країни та зарубіжжя, продовжили здобуття вищої освіти в кращих навчальних закладах світу.

Саме 11-В клас став поштовхом для втілення творчим педколективом ідеї створення фізико-математичної гімназії на базі школи. Саме 11-В — перший випуск в 1991 році вже фізико-математичної гімназії.



20 років потому. Д. М. Власов із випускниками 11-В класу ФМГ №17
1991 року випуску, 2011 р.

Великою радістю для В'ячеслава Андрійовича була зустріч з випускниками цього класу, що приїхали з різних куточків світу, присвячена 20-річчю випуску 1991 року. Важко собі уявити, але це факт: на сцені школи одночасно стояли 14 випускників одного класу з науковими ступенями, високопрофесійні спеціалісти фінансової та банківської справи, ІТ-технологій, лікарі, провідні фахівці інших сфер. А потім майже до ранку ділились із своїми вчителями спогадами про школу, навчання, розповідали про свої професійні досягнення, життєві надбання

та про значення навчання в славній фізико-математичній гімназії, роль своїх вчителів в життєвому становленні.

Гордість за успіхи своїх учнів — найбільша втіха Вчителя.

На жаль кілька місяців не дожив В'ячеслав Андрійович до очікуваного 25-річчя випуску легендарного класу талановитих учнів.

Всі наша родина надзвичайно зворушена сердечним співчуттям, щирою підтримкою та допомогою випускників 11-В класу в важкий час раптової втрати дорогої нам людини. Наша безмежна вдячність всім учням В'ячеслава Андрійовича за висловлену добру пам'ять, шану, теплі спогади, за допомогу у створенні цієї книги, за вашу чуйність і людяність.

Впродовж багатьох останніх років, маючи багаторічний досвід, В'ячеслав Андрійович доклав багато зусиль до популяризації математичних знань для бажаючих удосконалити навички в розв'язуванні складних олімпіадних задач та опанувати олімпіадні теоретичні теми. З-під його пера вийшло багато навчально-методичних посібників, брошур, статей, методичок. Безперечно вони і в майбутньому стануть в нагоді вчителям математики, а найбільше тим, хто самотужки, як в свій час і В'ячеслав Андрійович, опановуватиме нові знання, коли поруч немає досвідченого наставника.

Створена ним база нових авторських задач для олімпіад усіх рівнів ще послугує великій справі формування нової генерації математиків. І в останні хвилини свого життя В'ячеслав Андрійович був за комп'ютером, працюючи над написанням його останньої (як виявилось) книги.

Будучи людиною вельми товариською, В'ячеслав Андрійович мав багато щирих друзів і поза професійною діяльністю. Почуття гумору, оптимізм, життєрадісність, широту інтересів, вміння почути і зрозуміти людину і, головне, повсякчасну готовність надати пораду і допомогу, підтримати в скруті, він проніс через усе життя.

Ці риси поцінювали всі, хто його знав. Він полюблив першим привітати друзів із святами та днем народження (часто будив на світанку) своїм телефонним дзвінком. Навзаєм: в його день народження всі телефони впродовж всього дня дзвонили майже безперервно — і він був цьому дуже радий.

Поза роботою улюбленими чоловічими захопленнями були відвідування лазні і риболовля. Щонеділі з необхідними атрибутами він вирушав

до лазні. Регулярні відвідування більше 30 років подарували багато щирих друзів — людей різних професій і вподобань.

А після лазні — обов'язкові «чоловічі» посиденьки з душевними розмовами та частуванням. Разом відзначали свята: родинні, релігійні, державні, особисті, знаменні та сумні події, з піснями, віршами, жартами, різними «побасеньками». Щиро раділи успіхам один одного, допомагали у вирішенні життєвих проблем, подоланні складних ситуацій.

Справжнє чоловіче братство, де В'ячеслав Андрійович був лідером і душею компанії!

У нашій родинній планетарній системі В'ячеслав Андрійович був центральною зіркою — Сонцем — яскраво світив, зігривав своїм теплом, притягував любов'ю, добротою, щирістю. Був турботливим сином і братом, ніжним батьком трьох доньок, люблячим чоловіком.



В. Ясінський із дружиною та донечками

Усе своє життя всіх підтримував, всім допомагав. Був мудрим у стосунках, поступливим і поблажливим у своєму жіночому сімейному колі. Натомість сам був невибагливим у побуті, байдужий до матеріальних надбань.

Найбільша любов і гордість — наші улюблені внуки Андрійко і Володимир. Саме цими іменами внуків стали називатись персонажі його авторських задач. А вони навзаєм — ніжно любили дідуся, з радістю приїжджали в гості, разом ходили на прогулянки, на стадіон, грали в шахи і доміно, займались математикою, дарували дідусю свої малюнки. Андрійка дідусь учив готувати його улюблені страви.

Коли не стало дідуся, трирічний Володя все допитувався: «Де дідусь?» Не знаючи як пояснити його довгу відсутність, я відповіла: «Дідусь уже живе на небі. Ми не можемо з ним спілкуватись, але він бачить і оберігає нас». Внучок замислився, потім сказав: «Дідусь заблукав на небі, треба зробити ракету, полетіти і відшукати його». Якби ж то було можливо! Дідусь вже назавжди став зірочкою на небі.

Наш глибокий і вселенський смуток — надто рано дідусь полишив внуків і сім'ю. А три роки до того в інший світ відійшов і другий дідусь наших внуків — Яценко Володимир Олександрович. І він до нестями любив внуків, всю сім'ю. Був людиною надто освіченою, ерудованою, з глибокими знаннями філософії, історії, політології, економіки. Також багато часу приділяв розвитку і дозвіллю внуків, зібрав бібліотеку чудових книг для них.

Нам всім їх дуже не вистачає! Час гоїть рани?!

Древні мудреці говорили: «Кожна людина — це Всесвіт. Коли людина йде в небуття, разом із нею з життя його рідних та близьких відходить частина і їх життя, яка міцно пов'язана з ним». Біль утрати назавжди залишиться в наших серцях!

Це ессе (далеко не повне) — не просто біографія дорогої мені людини, скоріше — розмірковування над життям, професією, взаєминами.

Осмислюючи шлях В'ячеслава Андрійовича, я певна: він був щасливою людиною, його життя наповнене творчими успіхами, родинним теплом, добрими посмішками друзів, радісними і сумними подіями, а головне — натхненною професійною діяльністю.

Професія для нього була поєднана із захопленням улюбленою справою, доленосними зустрічами із досвідченими наставниками в юності, творчою колективною співпрацею з друзями-однодумцями, успіхами талановитих учнів. У поєднанні з невтомною наполегливою працею улюблена робота переросла в творчість, що дала вищий сенс життя, втілення мрій і прагнень. Саме професія подарувала багато перемог і злетів, а

головне — дала можливість виплекати славному плеяду учнів, допомогти їм реалізувати свої здібності і таланти та перевершити Вчителя.

Справа життя, якій віддавав всього себе без останку, де навіть у снах приходили задачі — поєднання фігур, композиція формул, музика теорем — симфонія математики, поліфонія геометрії — улюблениці і натхненниці!

Сподіваюсь, професійний досвід В'ячеслава Андрійовича додасть сили його колегам, однодумцям по професії (на жаль, недостатньо поцінованій сьогодні) — педагогам, які, як і я, мріють про Школу, в якій буде можливість і вчителю, і учню реалізувати свої здібності, таланти, устремління, де буде всім цікаво і затишно, та сподіваються, що освіта стане стратегічним пріоритетом держави.

Для сім'ї — назавжди залишиться в наших серцях, нашій пам'яті, світлих спогадах і наших справах.



Павло Пулявський

В'ячеславу Андрійовичу Ясінському, з довічною шаною, подякою та любов'ю

В'ячеслав Андрійович Ясінський був і є людиною, що вплинула на мене більше, ніж хто-небудь інший, можливо за виключенням моїх батьків. Я спробую описати В'ячеслава Андрійовича як математика і педагога, розуміючи, що описати його як людину дуже важко у такому короткому форматі. Але саме спогади про нього як людину залишаться зі мною до кінця мого життя.

Коли я вперше зустрів В'ячеслава Андрійовича мені було дванадцять років. Я вже любив математику, але ще не пройшов через тренування, яке зробило б мене професійним «олімпійцем». Почавши працювати з В'ячеславом Андрійовичем, я одразу відчув, що я поруч з людиною, яка розуміє не лише математику, але і як вчити й інших.

Перше, на чому В'ячеслав Андрійович наполіг — була необхідність записувати мої розв'язання задач. Тоді я ще не розумів чому це необхідно робити, але віра в авторитет мого вчителя допомогла мені прислухатися та ретельно записувати у зошит розв'язання всіх задач, про які я думав.

В'ячеслав Андрійович любив казати, що задача, яка була розв'язана, але не була записана, була розв'язана лише наполовину. Зараз, коли я доросла людина і професійний математик, я розумію чому це було так важливо.

Що відрізняє людину здатну до математичного мислення від людини яка до нього не схильна? Я певний, що найсуттєвішою відмінністю є вміння відрізнити бажане від реальності. Іншими словами, це вміння скептично ставитись до свого мислення, і перевіряти чи є у ньому логічна помилка. Людині, що не звикла до математичного мислення, воно здається важким саме тому, що потребує дисципліни і самокритичності. Математик питає себе весь час: «Чи дійсно моя логіка бездоганна? Чи не пропустив я що-небудь? Чи розглянув я всі випадки?»

Таке мислення не з'являється саме собою, йому вчать, хоча в деяких людей до нього більше здібностей, ніж в інших. Найкращий метод перевірки свого мислення — це пояснити свій аргумент іншій

людині. Записування аргументу — це пояснення його уявній людині, що буде читати написане. Саме наполягання В'ячеславом Андрійовичем на такому записуванні навчило мене думати як математик. Я продовжував записувати свої розв'язки до завершення навчання в школі. Зараз, коли я пишу математичні статті, я вмю пояснювати краще, ніж в молоді роки. Але 90% мого вміння сформувався саме тоді, під наглядом В'ячеслава Андрійовича.



Заняття з Павлом Пилявським, 1995 рік

Ще одним впливом В'ячеслава Андрійовича на мене з самого початку була відмова від «слабких сторін». До того як я почав з ним працювати, я був практично незнайомий з геометрією, і вважав її своєю слабкою стороною, навіть не намагаючись її вивчити. Дізнавшись про це, В'ячеслав Андрійович відразу дав мені декілька книжок по геометрії, та почав витрачати більшість нашого спільного часу саме не неї. Я не пам'ятаю чи формулював він це словами, але було зрозуміло: якщо я працюю з ним, в мене не може бути слабких сторін. З часом, геометрія стала моїм улюбленим предметом, і я виграв не одну математичну олімпіаду саме тому, що міг розв'язувати геометричні задачі краще за інших.

Можливо доречно буде розповісти як ми працювали з В'ячеславом Андрійовичем. Я проводив декілька годин у нього вдома кожної суботи або неділі. Окрім цього, мені дозволяли пропускати заняття в школі,

замість яких я ходив на заняття В'ячеслава Андрійовича в педагогічному інституті. Він задавав студентам задачі для розв'язування, і поки вони думали, сідав зі мною на задню парту та знаходив задачі для мене. Часто ми розв'язували задачі разом, розповідаючи один одному ідеї. Пізніше я зрозумів, що принаймні на початку він мав прикидатись, що не знає як розв'язувати задачі, для того, щоб я думав сам. Він робив це так вміло, що мені не приходило в голову, що це відбувається. З віком, коли я став сильнішим, у цьому більше не було потреби і ми дійсно разом думали як розв'язувати олімпіадні задачі.

Заняття математикою з В'ячеславом Андрійовичем є одними з найщасливіших спогадів моїх шкільних років. Його любов до математики була заразною, і те як він ставився до мене як до рівного під час наших занять давало мені відчуття повагу, яку потребує кожен підліток.

У старших класах В'ячеслав Андрійович почав працювати спільно зі мною над компонуванням задач, а не лише над їх розв'язанням. Деякі результати нашої співпраці було використано на різних рівнях Всеукраїнської та Соросівської олімпіад, у молодших класах. Серед усіх аспектів моїх математичних занять під час шкільного навчання компонування олімпіадних задач напевно найбільше сприяло моєму розвитку як математика. В'ячеслав Андрійович і я продовжували компонувати задачі і після того, як я закінчив школу.

Якщо говорити про педагогічний хист В'ячеслава Андрійовича, необхідно також згадати його вміння будувати відносини з учнями. В'ячеслав Андрійович вірив у те, що з кожним треба розмовляти на його мові. Він завжди дуже серйозно розмовляв з тими учнями що сприймали математику серйозно. Навпаки, учні, що ставились до себе з іронією, отримували таке саме іронічне ставлення від нього. При цьому В'ячеслав Андрійович зберігав повагу до всіх учнів, але й вимагав відповідну повагу до себе.

Я мав нагоду спостерігати В'ячеслава Андрійовича не лише в олімпіадному середовищі, але й у школі та інституті, де він викладав. Йому надзвичайно легко давалося встановлення дисципліни у класі. В'ячеслав Андрійович поважав як себе так і інших, і учні це відчували. Він використовував почуття гумору, щоб приструнити тих, хто заважав проведенню заняття.

Що цікаво, він дозволяв учням у класі більше ніж будь-який інший вчитель. Наприклад, на його заняттях можна було розмовляти, якщо робити це досить тихо і не заважати класу. Якщо учень списував в іншого учня, В'ячеслав Андрійович звичайно журих учня не за сам факт списування, а за те що учень навіть списати не міг без помилок. Не зважаючи на таке досить легке ставлення, навіть слабкі учні досягали відчутного прогресу в розв'язанні задач із збірника Сканаві. В'ячеслав Андрійович був зіркою олімпіадного руху, але він міг навчити математиці навіть учнів зовсім не схильних до неї.

Окремої згадки заслуговують різні приказки та анекдоти, які В'ячеслав Андрійович любив розповідати під час занять. Коли занадто впевнений у собі учень робив помилку, відповіддю часто була приказка «лопух — він і в Африці лопух». Повна версія була трохи довшою. В'ячеслав Андрійович починав з того, що десь в Африці ростуть лопухи, які вищі за людину. І от ці лопухи думають, що вони дерева. Але вони помиляються, бо лопух — він і в Африці лопух, а не дерево. Я не певний, що в Африці дійсно є такі великі лопухи, але мораль приказки від цього не залежить. Останнє, що я можу додати про цю приказку, це те, що В'ячеслав Андрійович ніколи не застосовував її до мене.

Іншим прикладом є історія про козу, за допомогою якої В'ячеслав Андрійович пояснював метод додаткової побудови в геометрії. Посеред лекції він розповідав про чоловіка, що прийшов до іншого жалітися на те, як мало місця в нього вдома: діти, жінка, батьки, батьки жінки, і все це лише у кількох кімнатах. На це чоловік отримав пораду завести дома козу. Через місяць він знов прийшов жалітися, кажучи, що стало навіть гірше. Тоді йому було сказано здихатися кози. Після цього чоловік дуже зрадів і сказав, що тепер відчуває, що в нього повно місця вдома. Мораль була така: іноді в геометрії треба робити додаткову побудову, що схоже на приведення зайвої кози додому. Але потім цю побудову необхідно застосувати до початкової задачі, що аналогічно виведенню кози з дому.

Взагалі, В'ячеслав Андрійович любив пояснювати математику по-простому, або як він казав «по-сільському». Наприклад, коли він вводив нову змінну, замість того, щоб назвати її «ікс» або «ігрек» він міг назвати її, наприклад, «корова». Окрім того, що це викликало сміх, це також демонструвало учням, що назва змінної не є важливою.

В'ячеслав Андрійович сильно вплинув на мене як викладача. Його філософією завжди було пояснювати так, щоб було зрозуміло найслабшому учню в кімнаті. Під час моєї праці з В'ячеславом Андрійовичем це мені здавалось зайвою тратою часу. Але коли я сам почав викладати, я помітив, що найзручнішим для мене є повторювати стиль В'ячеслава Андрійовича. Зараз мені здається, що якби не його вплив, моє викладання було б набагато менш зрозумілим та ефективним. Я отримую певну насолоду від повільного і чіткого пояснення, що дратує сильних учнів, але можливо допомагає слабким. Мені здається В'ячеслав Андрійович також отримував від такого стилю насолоду.

Деякі з засобів, що були використані В'ячеславом Андрійовичем, важко повторити в інших умовах. Він любив змінювати систему так як йому здавалось потрібним. Наприклад, з часів наших найперших років, коли я приходив на його пари у педагогічному інституті, я пам'ятаю його нелюбов до п'ятибальної системи оцінювання. Він любив казати, що балів має бути лише два: « $\pi = 3,14...$ », що означає задовільно, та « $e = 2,71...$ », що означає незадовільно. Якщо я правильно пригадую, потім він дійсно перейшов на таку систему. В'ячеслав Андрійович також любив жартувати, що він не може запізнитися на свою лекцію, бо якщо його там немає, то це ще не його лекція.

Багато з моїх спогадів про В'ячеслава Андрійовича занадто особисті, щоб їх описувати. Ми часто говорили про нематематичні теми: політику, релігію, жінок, життя у цілому. В'ячеслав Андрійович любив ділитися своїми поглядами, але він завжди з повагою ставився до права інших не погоджуватись з ним. Він любив казати «всі люди різні».

Одним з найбільших везінь у моєму житті було зустріти та працювати з В'ячеславом Андрійовичем. Він був мені одночасно учителем, батьком і другом. В'ячеслав Андрійович завжди залишиться в моєму серці, і в серцях всіх тих, хто його знав і любив.



Спогади друзів — колег по співпраці на математичних олімпіадах

В'ячеслав Ясінський та Всеукраїнські математичні змагання

Я познайомився з В'ячеславом в березні 1991 року, коли його вперше включили до складу журі Всеукраїнської математичної олімпіади (точніше кажучи, тоді вона востаннє називалася Республіканською і була етапом Всесоюзної олімпіади). Тоді мало хто міг передбачити, яку важливу роль зіграє цей новачок в подальшій діяльності нашого колективу і математичних змаганнях в Україні загалом.

З 1992 року Всеукраїнська олімпіада стала математичним змаганням незалежної держави. До того значна кількість завдань для олімпіади бралася з методичних вказівок, що надсилалися оргкомітетом Всесоюзної олімпіади і не було гострої необхідності у великій кількості оригінальних задач українських авторів. Тепер же все завдання треба було готувати в Україні. Традиційно для останнього етапу олімпіади бралися нові задачі, що не пропонувалися на інших змаганнях і не були опубліковані раніше (для обласного і районного етапів вважалося цілком припустимим використовувати і не нові, хоча і не дуже відомі задачі). Також Україну запросили до участі в Міжнародних математичних олімпіадах, де теж треба було пропонувати свої нові задачі.

Варіант кожної олімпіади не може бути складеним просто з кількох нових завдань. Задачі повинні бути різної складності, що, з одного боку, відповідає рівню учасників, з другого — «розділити» їх, виділивши невелику кількість найкращих учасників і певну розумну кількість призерів. В хорошому олімпіадному варіанті присутні задачі різної тематики — алгебраїчні, геометричні, логічні та комбінаторні, завдання мають перевіряти і здатність мислити, і володіння математичними твердженнями. Крім того, важливим є математично-естетичний бік — варіант має бути цікавим для учасників.

Отже, були потрібні задачні «композитори». Звичайно, чимало членів журі Всеукраїнської олімпіади, інші фахівці стали активніше пропонувати свої задачі, але саме в цей час до складання нових задач підключився В'ячеслав Андрійович. Завдяки його роботі ні учасники, ні

педагоги-математики не помітили складнощів перехідного часу, зберігся звичний рівень Всеукраїнської олімпіади. З кожним днем все більшим був внесок В'ячеслава Андрійовича в «банк нових задач». Ці задачі були різної тематики, різної складності — саме це і потрібно для вибору задач для олімпіади. Через кілька років стала звичною ситуація, коли більше половини задач були за його авторства.

В 1994–2000 рр. в Україні пройшло сім Соросівських олімпіад, в 1998 році започатковано Всеукраїнські турніри юних математиків, регулярно проводилися Відкриті олімпіади Рішельєвського ліцею в м. Одесі, і всюди «грали» задачі В'ячеслава Андрійовича. Нарешті, в 1998 році, задача, запропонована Україною, увійшла до завдання Міжнародної математичної олімпіади. Така ж подія трапилася у 2002 році. Звичайно, в обох випадках це були його задачі.

Було видно, що В'ячеслав Андрійович не шукав у цьому якоїсь слави, йому бувало незручно, що дуже багато задач підписані тільки його прізвищем. Він часто намагався дописати співавтора, переконуючи всіх, що йому допомагали скласти завдання.

Ця велика кількість задач була результатом постійної цілеспрямованої роботи. В'ячеслав Андрійович вивчав матеріали олімпіад та математичні книжки інших країн, завжди просив привозити йому нову літературу (особливо важливо це було в часи до широкого використання Інтернету). Зрозуміло, що багато нових задач виникають при використанні вже відомих ідей і підходів на нових об'єктах, в нових сполученнях. Але майже ніколи ми не могли впізнати, які попередньо відомі задачі підказали В'ячеславу Андрійовичу ідею його нового «композиторського» шедевра.

Як результат роботи з різними джерелами, з'являлися і нові задачі, і його книги для підготовки до математичних олімпіад. Очевидно, В'ячеслав Андрійович був найбільш плідним автором в даному напрямку в Україні. Він методично обробляв розглянуті ним матеріали, групував їх за тематикою, за використаними ідеями, писав свої розв'язки. Багато класичних теорем стали добре відомими українським учням та педагогам саме з його публікацій.

Під час самої олімпіади він не дуже любляв рутинну роботу по перевірці робіт учасників. Його значно більше влаштовувало живе спілкування з ними, і в ролі експерта-консультанта олімпіади він почував себе найкраще. В цій якості він мав узгоджувати критерії оцінювання



В. А. Ясінський, В. М. Радченко та І. М. Мітельман на Всеукраїнському турнірі юних математиків (м. Запоріжжя, 2015 р.)

з членами журі, переконувати учасників у справедливості виставлених балів, бути постійно в колективі.

Так склалося, що в останні роки В'ячеслав Андрійович не працював на заключних етапах Всеукраїнської олімпіади (можна сказати, що він сам не хотів працювати в цьому журі після зміни керівництва олімпіади). Більше уваги В'ячеслав Андрійович став приділяти турнірам юних математиків, вони стали його основним майданчиком для спілкування з учнями та викладачами з усієї України. Саме турнір, проведений наприкінці жовтня 2015 року в м. Запоріжжі, був останньою великою зустріччю В'ячеслава Андрійовича зі своїми колегами з різних куточків країни. Там він, як завжди, був активним і повним творчих планів. Але через тиждень його не стало.

Нам залишилася світла пам'ять про видатного педагога-математика та його величезний доробок.

Вадим Радченко,

*доктор фізико-математичних наук, професор Київського
національного університету імені Тараса Шевченка*



Найголовніша теорема В'ячеслава Ясінського...

Більше року промайнуло від миті отримання приголомшливої звістки з Вінниці. Ті скрутні дні були сповнені сумними емоціями, спогадами, які не вдається повною мірою вгамувати у свідомості і сьогодні, хоча час — і це закон буття — поволі виконує свою захисну місію. Довелось усім звикнути до думки та реальності, що В'ячеслава Андрійовича Ясінського вже немає серед нас, що його унікальне місце поряд з кожним, хто був його другом, колегою, однодумцем чи учнем, назавжди спорожніло...

Як особисто мені слід було поставитись до потреби висловитись у меморіальній збірці, присвяченій В. А. Ясінському? Що додати до нашого урочисто-офіційного прощального нарису, надрукованого багатьма фаховими виданнями, розтиражованого всюдисущим Інтернетом? Чим буде це відрізнятись від слів на честь інших видатних постатей, які завершують свій гідний життєвий шлях?

З одного боку, для мене це видається не надмірно складною задачею. Адже мої спогади про В'ячеслава Андрійовича живуть на сторінках численних написаних разом відомих далеко за межами України книжок і статей. Перегортаючи їх, відтворюєш у пам'яті наші цікаві та інколи навіть і запеклі дискусії, години телефонних розмов, чудові миттєвості відчуття професійно зробленої справи.

Пам'ять про В'ячеслава Андрійовича — у роботах, написаних без його безпосередньої участі, але процесом створення яких він завжди жваво цікавився. Розповідаючи про свої власні задуми, ніколи не забував про творчі плани та ідеї друзів та наполягав на їхньому невідкладному втіленні, нагадуючи, що час спливає швидко і ми мусимо встигнути зробити якомога більше з того, що можемо дати людям.

Мої спогади про В'ячеслава Андрійовича — це спільна для нас з ним історія творення та нелегкого становлення власної української системи роботи з математично обдарованою молоддю: Всеукраїнські учнівські математичні олімпіади, Всеукраїнські турніри юних математиків, Соросівські олімпіади школярів України, підготовка команди України до Міжнародних олімпіад, напружене очікування їхніх підсумків. Це — безліч семінарів та конференцій, літніх шкіл, відкритих олімпіад та фестивалів, у проведенні яких разом брали участь. Це — спільна робота над оригінальними задачами, пошуки нових підходів до класичних задачних тем, спільне розв'язування складних задач,

якими ми зацікавилися. Це — наші нескінченні розмови про творчі удачі та безумовні поразки, про справедливість і долю, про шляхетність і підступність, про непрості випробування, яких ми зазнавали на цій тернистій педагогічній стежині, про мистецтво гідно жити. У моїх спогадах про В'ячеслава Андрійовича — незабутні години, вечори, дні спільного відпочинку в колі друзів і колег, його хист генерувати відчуття дружньої згуртованості та захищеності. Він вмів без перебільшення красиво спілкуватись з академіками та професорами, учителями та школярами, людьми будь-яких професій і статків. І це було органічно та від душі, а не зрежисованою поведінкою навченої досвідом людини!

Для мене майже чверть століття дружби та сумісної творчості промайнули майже непомітно. Протягом багатьох років мені доводилось радитись із В'ячеславом Андрійовичем у багатьох життєвих ситуаціях, і можу впевнено сказати, що жодного разу не пошкодував, що дотримувався його порад. Він завжди на турнірах і олімпіадах, на своїх лекціях і уроках говорив під час розборів задач: «Усе слід доводити!». Тож наші учні й студенти, мабуть, думають, що люди нашого фаху весь час доводять математичні теореми. Вони ще не знають, що ми щодня доводимо найголовнішу теорему нашого професійного життя — на право бути Вчителем. І для цієї теореми В'ячеслав Ясінський знайшов своє власне блискуче доведення!

А з іншого боку, намагання стисло на папері згадувати В'ячеслава Андрійовича Ясінського є справою майже марною. Адже жодні слова не спроможні відтворити колорит цієї видатної всебічно обдарованої особистості. Намагатися бути схожими на нього немає сенсу. Важливою особливістю його вдачі було те, що він ніколи не прагнув опинитися на самоті на сяючих вершинах своїх досягнень. Навпаки, він немов би «підтягував» тих, хто був поруч з ним, до раніше недосяжних для них висот. Доводив, що вони також здатні створювати задачі, писати книжки, статті. Скільки в нього співавторів — важко перелічити. Зокрема, В'ячеслав Андрійович міг переконати будь-яку людину, з якою буквально декілька хвилин обговорював математичну чи методичну проблему, що це вже його співавтор. До того ж, він розумів свої недоліки та брак певних знань і навичок і вмів звертатися по допомогу.

Вражало його вміння по-справжньому радіти успіхам друзів, товаришів по роботі, учнів. Він першим вітав з отриманням ними

високих нагород, захистом дисертацій тощо. Сам я і не сумнівався, чий телефонний дзвінок почую в першу чергу, увімкнувши мобільний телефон після вручення в Маріїнському палаці посвідчення заслуженого вчителя України. Усі його здобутки — результат виснажливої праці з юних років, і він завжди розумів, яких зусиль коштує людині просування шляхом творчого зростання.

Знаю, яким було здивування рівнем науково-методичних та педагогічних звитяг В. А. Ясінського тодішнього Міністра освіти і науки України С. М. Ніколаєнка, який на засіданні Державної атестаційної колегії особисто вручав В. А. Ясінському атестат про присвоєння вченого звання доцента — як виняток — без наукового ступеня кандидата наук. В'ячеслав Андрійович так і не знайшов можливості відволіктись на формальне оформлення свого доробку у вигляді дисертації. Декілька разів намагався розпочати цю роботу, але — надзвичайно рідкісний випадок для нього — не судилося виконати обіцянок, даних друзям і навіть Міністрові... Можна впевнено сказати сьогодні, що зроблене В. А. Ясінським варто не тільки його дисертацій (упевнений, багаторазово написаних в його уяві, але не відтворених на папері), але й майбутніх дисертаційних досліджень феномена Ясінського. Годі вже й казати, скільком пошукачам кандидатських та докторських регалій в галузі методики навчання математики надав безцінної допомоги В'ячеслав Андрійович! Згадав щойно слова нашого друга професора Валентина Лейфури: «Кандидатом чи доктором наук неважко стати, заручившись підтримкою лише 20-30 осіб, а бренд Ясінського — визнання тисячами учителів і учнів.» Відсутність наукового ступеня анітрохи не затьмарювало настроїв В'ячеславу Андрійовичу, який, залишаючись скромною неамбітною людиною, добре відчував свій винятковий у певному розумінні статус та особливий талант, який не потребував додаткових дипломів з печатками та золотим тисненням на палітурці та яким він щодня щедро ділився з усіма, хто хотів і вмів бути поряд.

Усім здавалося, що в нього безліч часу, якого вистачає на всіх і на все. Але ж близькі друзі знали, яке в нього шалене навантаження на роботі, скільки в нього складних обов'язків та проблем в родині, яку він мав забезпечувати своєю напруженою працею. Якої його турботи потребують діти, онуки. Утім у всіх було враження, що якщо завтра олімпіада чи

післязавтра турнір, то йому можна зателефонувати і попросити щось придумати, і він це зробить — з фірмовим знаком якості «від Ясінського».

Коли наприкінці жовтня 2015 р. завершувався XVIII Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М. Й. Ядренка, В'ячеслав Андрійович несподівано вирішив поміняти квиток і поїхати на день раніше, не залишившись на фінальний бій турніру, чого не робив ніколи раніше. Усім здалося, що він відчуває якийсь надмірний тягар, якого не могли приховати завжди усміхнені очі. І коли через декілька днів відбулось непоправне, то все встало, як це не прикро, на свої місця...

Він би не хотів тривалої скорботи.

В'ячеслав Ясінський жив, розуміючи розмаїття та складнощі життя, не ухиляючись від них, і повною мірою виконав своє призначення. Залишається пам'ятати його, цінувати те, що ми мали щасливу нагоду бути поруч з ним, працювати з ним, учитися в нього і відчувати, що він гідно



оцінював талант кожного, що намагався в кожній людині чогось навчитися, для багатьох став точкою опори для сходження на їхні власні вершини.

Унікальна за змістом і обсягом творча спадщина видатного українського педагога-математика В'ячеслава Андрійовича Ясінського є яскравою сторінкою історії вітчизняної освіти і назавжди залишиться справжнім діамантом у скарбниці світового олімпіадного руху юних математиків, стане джерелом звершень прийдешніх поколінь невтомних ентузіастів математичної педагогіки.

Ігор Мітельман,

*заслужений вчитель України, доцент,
кандидат фізико-математичних наук, м. Одеса*



Пам'яті В'ячеслава Андрійовича Ясінського — лицаря цариці всіх наук

Ты здоровье своё не берег, не падал.
И силы не раз напрягал до предела.
Как загнанный конь пахал и дерзил,
И сердце полёт завершить не сумело...

Я в памяти образ твой светлый храню.
На сайт выхожу, когда тяжесть на сердце.
Тихонько глотаю, скупую слезу —
От тяжести этой мне некуда деться...

В. О. Швець, листопад 2015 р.

З В'ячеславом Андрійовичем я познайомився в далекому 1982 році в місті Миколаєві. Тоді ми зустрілись на Всеукраїнській олімпіаді юних математиків як керівники команд, він — Вінницької, я — Київської області.

Дружба зав'язалась одразу і назавжди.



В. А. Ясінський і В. О. Швець під час роботи Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики» (2012 р.)

Безмежно сумую, що втратив чуйного, вірного однодумця, друга, брата по професії і по духу...

Він був видатною людиною, вартою уваги і поваги людей, того, щоб про нього написати цілу книгу.

Його хочеться наслідувати, але повторити неможливо! З присмаком гіркоти, суму і втрати виставляю свої поезії про незабутнього друга — Славка Ясінського...

Печальну ношу нести важко,
Такий напій — гіркий полин...
Ти був достойний друг і батько,
Коханий муж і вірний син!

Хто звав тебе в країну предків,
Відтіль немає вороття...
Прощай, прощай духовний брате!
Ти так любив, любив життя...

Останнє фото вабить очі,
Зросили сльози п'єдестал.
Мов птах, підстрелений в польоті,
Розправив крила і упав.

І серце битись перестало
Яким ти всіх хотів обнять.
Глянь із небес шановний брате —
Гвоздики полум'ям горять!..

Хто звав тебе в країну предків,
Відтіль немає вороття...
Прощай, прощай, духовний брате!
Ти так любив, любив життя...

Василь Швець,

*професор, завідувач кафедри математики і теорії та методики
навчання математики Національного педагогічного
університету імені М. П. Драгоманова*



Пам'яті В. А. Ясінського

Є Люди, знайомство з якими сприймаєш як подарунок долі. В'ячеслав Андрійович Ясінський був одним з таких.

Познайомився я з В'ячеславом Андрійовичем в 1999 році під час роботи в журі Всеукраїнської олімпіади юних математиків, яка проходила у Запоріжжі. Звичайно, що ще задовго до цього я знав його (так би мовити) «заочно». Адже були випадки, коли автором половини задач заключного туру Всеукраїнської олімпіади юних математиків був саме В'ячеслав Андрійович. Професійні математики знають, наскільки не просто скласти оригінальну олімпіадну задачу. Те, що В'ячеслав Андрійович був автором великої кількості таких задач і з геометрії, і з алгебри, і з теорії чисел, здавалося неймовірним. Хотілося познайомитись з такою людиною, і наперед здавалося, що це буде сивочолий дідусь-професор. Приємною несподіванкою було зустріти викладача середнього віку примітної, досить колоритної зовнішності. Відкритий, щирий, доброзичливий, він вирізнявся. Потім у процесі роботи виявилось, що з ним просто і приємно спілкуватися всім: і членам журі, і учням.

Приємно і дуже повчально було працювати у одній команді з В'ячеславом Андрійовичем. Особливо вражало його доброзичливе, неупереджене ставлення до учнів — учасників олімпіади. Під час апеляцій після спілкування з В'ячеславом Андрійовичем учні завжди були задоволені таким спілкуванням (навіть якщо оцінка їх розв'язання не змінювалась). Більше того, вони після цього були впевнені в тому, що наступного разу виступлять краще.

Також мені випала честь працювати разом з В'ячеславом Андрійовичем у 2004–2006 роках при проведенні конкурсних відбірково-тренувальних зборів з формування команди України на Міжнародну математичну олімпіаду. Найбільше запам'яталось, як В'ячеслав Андрійович проводив заняття з учнями — кандидатами у команду України: замість півтори години він міг працювати з ними три-чотири години, у нього вистачало і цікавих незнайомих учням задач, і сил, і насаги.

Про високі професійні якості В'ячеслава Андрійовича можна писати дуже багато. Він є одним з авторів книги «Задачі міжнародних олімпіад із математики та методи їх розв'язування», яку перевидано у Польщі. Викладачам математики та учням добре відомі його книги «Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування», «Математичні



В. А. Ясінський і О. А. Сарана працюють на IV етапі Всеукраїнської олімпіади з математики (м. Івано-Франківськ, 2006 р.)

олімпіади школярів України: 1991–2000 рр.», «Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр.», «Геометричні перетворення в задачах математичних олімпіад», «Олімпіадні задачі з теорії чисел» та інші.

В'ячеслав Андрійович Ясінський залишив за собою вдячних учнів, добрі справи, добрий приклад, добру пам'ять про себе.

*Олександр Сарана,
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
математичного аналізу Житомирського державного
університету імені Івана Франка*

Спогади друзів — колег по кафедрі

Велич особистості

Виноградную косточку в тёплую землю зарою,
И лозу поцелую, и спелые гроздья сорву,
И друзей созову, на любовь своё сердце настрою,
А иначе зачем на земле этой вечной живу...

Слова цієї пісні В. А. Ясінський в останній день свого життя власноруч переписав на аркуші паперу

У далекому 1976 році на відкритті Вінницької обласної олімпіади школярів з математики я вперше почула, як організатори олімпіади із захопленням розповідали нам про надзвичайний успіх Вінниччини в олімпіадних змаганнях школярів з математики у 1974 році: звичайний хлопчина із сільської школи Славик Ясінський, вперше взявши участь у районній олімпіаді, став переможцем районної, обласної та республіканської олімпіад з математики, а тому був включений у команду від України на Всесоюзній олімпіаді в Єревані. Пам'ятаю, мене дуже вразив цей приклад особистого злету, завдяки таланту і навчанню. Через кілька років ми, студенти фізико-математичного факультету Вінницького педінституту, із гордістю розповідали, що навчаємося на факультеті, де навчається сам В'ячеслав Ясінський. Ми захоплювалися його талантом до розв'язування математичних задач, неординарністю. На перервах його важко було не помітити: великий, гарний, впевнений — частіше був серед викладачів, ніж серед студентів.

Я навіть уявити тоді не могла, що з 1991 року доля подарує мені на багато років радість майже щоденного спілкування з цією надзвичайною людиною, що моє і професійне і особисте життя буде осяяне його порадами, підтримкою, дружбою. Я дякую долі за те, що мала можливість неодноразово відчувати надзвичайну велич особистості В. А. Ясінського. Наведу лише один приклад.

2005 рік, Мукачеве. Зала обласного драматичного театру. Відкриття IV етапу Всеукраїнської олімпіади школярів з математики. Зала заповнена учасниками олімпіади з усієї України, керівниками команд, офіційними представниками влади та освіти. За сценарієм відбувається представлення журі олімпіади, а це біля 20 осіб — знані в Україні науковці,

педагоги, серед яких доктори наук, професори, заслужені вчителі України. Зала аплодисментами зустрічає кожне наступне прізвище. Прізвище доцента В. А. Ясінського лунає одним із останніх у відповідності до алфавіту. І раптом всі присутні в залі піднімаються і стоячи аплодують непересічній особистості В. А. Ясінського, визнаючи його неперевершений талант у творенні олімпіадних задач, у майстерності розвивати в учнів математичні здібності, любов до математики. А я тоді подумала, всі педагоги-математики України знають і захоплюються В. А. Ясінським, а я маю щастя працювати поруч з ним. Я не один раз чула на професійних зібраннях за межами Вінниччини, що люди знають про Вінницю, або про Вінницький педагогічний університет, лише тому, що там працює В'ячеслав Андрійович Ясінський.

Насправді, той хто знав його дуже добре, захоплювався не тільки і не стільки його педагогічно-математичним даром, стільки його людськими якостями. Він був неповторним тамадою — душею будь-якої компанії, зразком турботливого батька, а як він умів дружити... Кажуть у людини не може бути багато справжніх друзів. Мабуть так воно і є, однак В. А. Ясінський був винятком із багатьох правил, тому так притягував до себе. Я впевнена, що десятки людей нині переконані, що були його найближчими друзями. І це не тому, що його завжди вистачало на задушевні розмови, а тому що він дуже багато допомагав своїм друзям, завжди підтримував, захищав їхніх дітей без будь-яких на те прохань.

Завдяки своїй феноменальній математичній обдарованості й несхитному життєлюбству він завжди користувався незаперечним і абсолютним авторитетом на кафедрі. В'ячеслав Андрійович любив організувати спільний «перекус», спільні посиденьки, він із задоволенням тішив нас новим анекдотом, заряджав гарним настроєм на весь день. Поруч з ним,



О. І. Матяш з В. А. Ясінським
(2015 р.)

незважаючи ні на що, було затишно й спокійно. Глибина і мудрість його міркувань щодо життєвих ситуацій змушували кожного з нас переосмислювати своє ставлення до багатьох подій і, взагалі, погляди на життя. На кафедрі залишився відеозапис його роздумів, які він у березні 2015 року, на наш подив, чомусь тоді називав своїм заповітом:

Найбільша неприємність — страх.
Найбільша помилка — втратити надію.
Найпаскудніша людина — та що бреше.
Найгірше почуття — заздрість.
Найкращий вчинок — пробачити.
Найкращий захист — усмішка.

Дякую, друже, за кожную пораду, за мудрість, за щирість, за щедрість, за те, що ти наповнював особливим смыслом все навколо себе, за те, що ти будеш завжди в нашій пам'яті світлим, величним, добрим і веселим!

Ольга Матяш,

*доктор педагогічних наук, завідувач кафедри алгебри і методики
навчання математики Вінницького державного педагогічного
університету імені Михайла Коцюбинського*



Видатний Учитель і прекрасна Людина

«Я хочу всё уметь — Расскажи мне, старик,
Как быть добрым, большим, мудрым и постоянным...»

*Слова з пісні О. І. Іващенко «Боцман»,
яку завжди пов'язував з В'ячеславом Андрійовичем*

«Альоша, привіт!» — такі слова я звик чи не щовечора чути, піднявши трубку міського телефону. Я завжди знав, хто мені телефонує по міському номеру. По вечорам, після робочого дня, В'ячеслав Андрійович телефонував і розпитував новини на кафедрі та у світі, події в особистому житті, нагадував про дні народження спільних друзів... І коли його не стало, працюючий телефон, який мовчав, наводив смуток і робив мене самотнім. Через місяць я його від'єднав і сховав у шафу...

Заглиблюючись у спогади про нашу дружбу і співпрацю, багато різного пробігає в пам'яті, і я не знаю за що схопитись. Тому в цьому

дописі я напишу не про певні події, а про те, ким був для мене В'ячеслав Андрійович. Найголовніше — він був Учителем у найширшому розумінні цього слова. Учителем не тільки математики, адже через призму навчання математиці він навчав жити... А взяв я від нього дуже багато.

Досить довгий час я вважав, що секрет успіху В'ячеслава Андрійовича — передусім, це вроджений талант, так би мовити «талант від Бога». І не тільки математичний. Проте все одно його настанови і поради по роботі з учнями мною зустрічались часто з певною часткою скептицизму і внутрішнього опору. Бувало, ми вступали в суперечки, причому В'ячеслав Андрійович часто ставав дуже емоційним у відстоюванні своєї правди і сердився, коли я його не розумів. Але ніколи не тримав зла — він добре знав, що до істини треба дійти самому, а не сліпо й некритично дослухатись до думки іншої, нехай навіть авторитетної, людини. Тим самим, поступово В'ячеслав Андрійович навчив мене говорити з ним відверто на різні теми. Як наслідок, з кожним роком ми ставали все ближчими і ближчими, він для мене став найкращим другом. І ось його не стало, а ті тези, які він повторював, мріючи бути почутим, починають нагадувати про себе висновками «І все-таки В'ячеслав Андрійович був правий!» А я часто їх згадую й переосмислюю. І це один із чинників його безсмертності для мене.



Із О. Б. Панасенком, 2006 р.

Для мене чи не його головний талант — майстерність розв'язувати задачі, знаходити відповіді на питання. Зараз мені здається, що я розгадав основний його життєвий секрет. Він постійно шукав не просто відповіді на питання, які його турбували, а й доведення їх істинності. І знаходив потрібні пояснення! І втілював у життя. Думаю, що на різних етапах свого життя він задавався багатьма питаннями на різні теми, наприклад: «Як можна пояснити певний матеріал якомога доступніше?», «Як робити рисунки до геометричних задач на комп'ютері?», «Як розв'язати цю

задачу, і як її можна було придумати?», «Як складаються задачі?», або ж: «Який сенс життя?», «Чи є у світі справедливість?», «Що таке любов?», «Якими рисами має володіти справжній чоловік?», «Я повинен себе поводити батько зі своїми дітьми?» і багато-багато інших. Повторюсь, бо мені це здається важливим: навіть на питання з очевидними відповідями він намагався знайти пояснення до цих відповідей й довести, що іншого бути не може. «Найскладніше пояснити те, що здається очевидним» — повторював він, і продовжував вимагати від себе і від інших доведення навіть того, що здається «очевидним»: і у математиці, і загалом по життю. В'ячеслав Андрійович не боявся витратити на це свій час, більше того, переконаний, що він вважав це надзвичайно важливим. Можливо це і навчило його знаходити відповіді на всі складні питання, які його турбували. Маю тверду віру в те, що знайдені відповіді були правильними. Так, побудовані на його власній системі аксіом й непорушних принципів. Все-таки вірі у Бога він теж відводив місце в своєму серці й не був зятятим раціоналістом. Відповіді на чимало питань він шукав у Біблії. Але, усвідомивши свої життєві принципи, він відповіді на свої питання шукав і знаходив, виходячи з цих принципів і керуючись життєвим досвідом та логікою. Знайдені відповіді знаходили своє відображення в щоденній праці, у спілкуванні з людьми, у відношенні до світу.

І тоді В'ячеслав Андрійович любив доносити знайдені ним істини близьким людям... «Матері для дитини ніколи не треба доводити, що вона — мати. Мати виносила свою дитину під серцем, народила в муках — цього досить. А батько повинен доводити — що він батько — кожного дня впродовж усього свого життя!» — ці слова по-батьківськи він неодноразово повторював мені, коли розмова заходила про мою доньку. Цим словам і сам він слідував — я це точно знаю. Для мене В'ячеслав Андрійович — взірцевий батько і сім'янин.

Кажуть, що все боїться часу, а час боїться пірамід. Думаю, що час боявся В'ячеслава Андрійовича, бо одна думка постійно дивувала: «Коли він все встигає?» Він фактично ніколи нічого не робив швидко (ну хіба що одного разу ми ризикували не встигнути на потяг і В'ячеслав Андрійович йшов трошки швидше, ніж зазвичай). Дуже сердився, коли я (щоб зекономити час) швидко розповідав, здавалось би, неважливі чи очевидні речі. «Не переско́куй!» — твердив він і підкріплював цю тезу відповідним анекдотом. І ось в такому нешвидкому режимі він встигав

поздоровити усіх іменників з днем народження, розлого поговорити по телефону із друзями, придумати кілька нових задач. Для мене В'ячеслав Андрійович — володар часу. Але все ж на одне-єдине йому часу не вистачало... Хоча... напевно, таким був його життєвий вибір.

А ще В'ячеслав Андрійович був майстром витримати паузу. Це його феноменальне вміння допомагало не тільки у вчительській роботі. Воно його прославило і як визначного оратора, проголошувача тостів і анекдотів. Його тембр голосу й невимушеність розмови заворожували, а паузи підсилювали цей ефект. Бувало доводилось чути один і той самий анекдот чи тост далеко не один раз. І (диво!) його завжди було цікаво слухати, він не набридав. Він вмів розказувати анекдоти і тости щоразу як вперше: з натхненням, з паузами в потрібних місцях, з відповідним художнім забарвленням. Для мене В'ячеслав Андрійович — майстер слова.

І ще для мене В'ячеслав Андрійович — взірець людяності. Він щедро дарував свою любов і увагу близьким людям, а тим недоброзичливим, які траплялись на його життєвому шляху, не бажав зла. Більше того, він мав велику силу прощення, говорив, що погані вчинки людей — це наслідки їхніх хвороб, і їм потрібно допомагати. І він допомагав як міг.

Гірко усвідомлювати, що ніколи його більше не побачиш і не почувеш, з ним не поговориш і не подискутуєш. Але ж скільки тепла в душах інших людей залишив В'ячеслав Андрійович! Це тепло гріє всіх, хто його знав, і веде далі по життю. Частка В'ячеслава Андрійовича продовжує жити в усіх людях, які його любили — і в мені вона живе. І робить мене щасливою людиною навіть тільки тому, що я мав таку життєву удачу у нього вчитись, з ним творити, з ним дружити... Що ж, доводиться завершити словами все з тієї ж пісні: *«Я уж как-нибудь сам жизнь рискну изучить...»*

Олексій Панасенко,

*доцент кафедри алгебри і методики навчання математики
Вінницького державного педагогічного університету імені
Михайла Коцюбинського*



Він любив математику і щедро ділився нею з іншими...

Дуже важко говорити і писати про В'ячеслава Андрійовича Ясінського у минулому часі.

Здається зовсім недавно зимового дня 1957 року у невеликому районному центрі Чернівці на Вінниччині народився хлопчик, який в своєму житті залишив помітний слід в методиці математики України. Його назвали В'ячеславом, але всі хто любив його називали просто Славком.

Його дитинство і юнацькі роки пройшли на берегах мальовничої подільської річки Мурафа. Тут він бігав босоніж, ловив карасів і окунців та ходив до школи. Він полюбив математику ще з шкільних років. Учителі математики Чернівецької середньої школи №1 зуміли прищепити тут йому першу любов до математики. Він бере участь у різних змаганнях з математики. Його успіхи в учнівських олімпіадах високо оцінювали. Він був учасником математичної олімпіади Радянського Союзу.

Після закінчення школи його дорога пролягла на фізико-математичний факультет Вінницького державного педагогічного інституту, який високо котирувався на теренах України. Тут працювали талановиті і вмілі педагоги, які зуміли дати друге дихання його любові. Значний вплив на його становлення і зростання як педагога з великої літери склали геометри Олонічев П. М., Карпенко В. Л. та відомий на той час методист Яровий С. С. Вони прищепили йому особливу любов до геометрії з її рисунками. А олімпіадні задачі і складні завдання з вступних екзаменів з математики у самі престижні вищі навчальні заклади були його покликанням.

Далі було навчання в аспірантурі Львівського університету та постійна любима робота в школі з учнями. Він вмів зацікавити дітей математикою та розвивати здібності талановитих дітей, які роз'їхалися і працюють по всьому світу та з вдячністю згадують його науку.

Після аспірантури В'ячеслав Андрійович через деякий час повертається на рідний факультет та продовжує працювати з учнями у вінницьких школах. Він вмів виявляти талановитих до математики дітей і успішно працювати з ними. Багато з його вихованців були переможцями різних престижних олімпіад та конкурсів в країні та за її межами. На кафедрі алгебри і методики навчання математики у повній мірі розкрився і

відшліфувався талант цього самобутнього самородка. Тут він опублікував цілий ряд своїх науково-методичних праць і отримав наукове звання доцента.

З ним легко було працювати як колезі і як адміністратору. Його жарти, анекдоти і притчі допомагали колегам по роботі підняти настрій навіть у складних життєвих ситуаціях. За весь період нашої спільної роботи на кафедрі як адміністратора я не пригадую жодної ситуації з ним, при якій би виникло якесь непорозуміння. Його вміння керувати застільям просто захоплювало навіть людей, які вперше зустрічалися.

На лекції і практичні заняття в університеті та інституті післядипломної освіти завжди була стовідсоткова явка. Не секрет, що педагоги завжди критичні і прискіпливі до успіхів своїх колег. Дехто пробує копіювати його спілкування з учнями, студентами і колегами, але копія завжди гірша від оригіналу.

Талант В'ячеслава Андрійовича був багатогранним і спогади про нього завжди будуть жити разом з його учнями, колегами і студентами, які навчалися у нього не тільки математики, а і як залишатися оптимістом в різних життєвих ситуаціях. Такі таланти не завжди знаходять належну оцінку при житті в держави, але його діяльність на поприщі методичної освіти України буде оцінена нащадками. Без перебільшення, кожний з написаних вище абзаців цих спогадів може стати темою окремого дослідження.

На завершення хочу відзначити, що в успіхах моїх дітей, яких вони досягли в своїх наукових дослідженнях і житті, також є частка праці В'ячеслава Андрійовича. Ми пам'ятаємо про це і вдячні йому.

Іван Рокіцький,

кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри алгебри і методики навчання математики, декан фізико-математичного факультету (1985–1997) і проректор Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (1997–2002)



Пам'яті нашого В'ячеслава Андрійовича

Познайомилась із В'ячеславом Андрійовичем у 1990 році, коли мама мене привела до нього на підготовку до вступу у ВНЗ. Тоді я вже знала, що хочу бути учителем математики і В'ячеслав Андрійович допоміг мені переконатись у правильності мого вибору. Саме він запропонував мені взяти участь у Всесоюзній профорієнтаційній олімпіаді старшокласників з педагогіки математики і з його допомогою, я зайняла почесне третє місце.



Л. Ф. Михайленко з В. А. Ясінським
(2015 р.)

Згодом, В'ячеслав Андрійович став улюбленим викладачем не тільки моїм, а всієї групи. Курс елементарної математики був улюбленим, а «крилаті фрази» В'ячеслава Андрійовича цитував кожний: «Дети, все на горшок» — це дозвіл йти на перерву, а коли ти помилився, або не побачив раціонального розв'язання задачі він називав тебе «шльомою», і при цьому ніхто

не ображався, а інколи з гордістю розповідали, що В'ячеслав Андрійович його назвав «шльомою».

Пізніше, мені щастить стати колегою по кафедрі. В'ячеслав Андрійович протягом кількох десятиліть був і залишається для мене яскравим прикладом педагога в самому високому і благородному значенні цього слова. Його приклад мудрості, невичерпної енергії, працьовитості завжди захоплював, заряджав і спонукав діяти. Тільки зараз починаю усвідомлювати, що всі ці роки у нього навчалась не тільки елементарній математиці, педагогічній майстерності, а вмінню дружити, доброзичливо, з повагою ставитись до людей, розставляти пріоритети в життєвих ситуаціях, вмінню розуміти гумор.

В'ячеслав Андрійович був знаним кулінаром. Кращого холодцю ніхто зварити не вмів. Він любив на кафедрі розпочинати бесіди: «Як правильно готувати плов?», «Як ти готуєш котлети?», «Як ти готуєш голубці?» Такі розмови часто завершувались тим, що або В'ячеслав

Андрійович, або той хто найактивніше брав участь в обговоренні приносили приготовлені страви для дегустації кафедрою. Саме у нього навчилась готувати жульєн. *Рецепт жульєна від В'ячеслава Андрійовича: 0,5 кг печериць середнього розміру нашинкувати пластинами однакової товщини, посолити і поставити у сковорідку нічим не змащену. Печериці мають пустити сік і в ньому тушкуватись на середньому вогні під кришкою. Коли у сковорідці випарувалась майже вся рідина додаємо 3–4 цибулини середнього розміру нашинковані півкільцями такої ж самої товщини, що й гриби. Далі тушкуємо на середньому вогні під кришкою (цибуля також має випустити сік). Коли рідини у сковорідці залишається зовсім трохи, добавляються спеції по смаку і кілька столових ложок сметани. Через 2–3 хвилини виключаємо вогонь, подаємо до столу гриби гарячими і посипаними тертим сиром.*

В'ячеслав Андрійович був дуже компанійською і дружньою людиною. Завдяки йому на кафедрі закріпились традиції відмічати свята. Самий улюблений його тост — будь щасливим і здоровим! Важко знайти людину, яка мала б стільки друзів, як він. І всі вони були справжніми, надійними та вірними друзями, які вміють підтримати та допомогти. Пам'ятаю, коли під час ремонту вдома, не могла знайти майстра і запитала у В'ячеслава Андрійовича, чи не може він когось порадити. В результаті, у День будівельника, до мене прийшли майстри, бо їх попросив В'ячеслав Андрійович. Ці люди не могли йому відмовити, тому навіть у своє професійне свято прийшли на роботу.

В'ячеслав Андрійович завжди був надійним, добросердечним, вірним, дбайливим і люблячим свою сім'ю, свій колектив, своїх багаточисленних друзів та ЖИТТЯ. З такими людьми на дорогах життя затишно, спокійно і світло. На завжди у пам'яті залишиться всміхненим, доброзичливим, радісним.

Світла пам'ять!

Любов Михайленко,

кандидат педагогічних наук, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського



Взірець учителя

Мати гарного вчителя — великий дарунок долі. Мені в цьому сенсі пощастило. В'ячеслав Андрійович був не просто викладачем, колегою, він був людиною, від якої я отримала уроки доброти, людяності й життєвого досвіду.

Спогади про В'ячеслава Андрійовича у мене завжди пов'язані із чимось теплим, світлим і добрим. Він мав невичерпну духовну енергію, велике бажання до нових пошуків і звершень, він творив, цінував кожний новий день як маленьке життя, радів зустрічам, спілкуванню з учнями, друзями, колегами, студентами.



Із А. Л. Воеводою (2011 р.)

Пам'ятаю, як В'ячеслав Андрійович заходив до нас в аудиторію й весело запитував: «Так, діти, хто к нам пришёл?» І після його лекцій ми були переконані, що не існує такої задачі, яку не зміг би розв'язати Ясінський. Так у нього все просто виходило, що навіть найскладніші задачі починали здаватися не такими вже й складними.

Іноколи ми боялися виходити до дошки, боялися його критичних зауважень. Але якою була радість, коли тобі вдавалося отримати «трійку» від Ясінського. Про вищу похвалу годі й було мріяти.

Вражало його почуття гумору й те, як легко й невимушено встановлював В'ячеслав Андрійович контакт зі студентами, яка атмосфера панувала в аудиторії. Він, окрім навчального матеріалу, одним влучним словом чи жартом міг донести складні життєві істини. Дівчатам, наприклад, казав, що для них головне — успішно вийти заміж, а все решта — другорядне. Його цитати та афоризми справляли на нас незабутнє враження. Мій одногрупник записував «крилаті вислови» Ясінського. Називався цей записник «Цитатник Ясінського» і починався словами: «Діти, задачу можна либо вирішити, либо не вирішити. Наполовину задачу вирішити нельзя...»

Пізніше, коли ми вже стали колегами, В'ячеслав Андрійович мені постійно допомагав. Підтримував у наукових пошуках, але ніколи не нав'язував власної думки. Часом розповідав якийсь анекдот чи повчальну історію, тим самим змушував задуматись над важливими речами.

Я завжди відчувала від В'ячеслава Андрійовича батьківську підтримку. Його слухні поради допомагали й підтримували. «Діти колег — це святе» — один з його відомих афоризмів. Він мені завжди казав: «Сім'я — найголовніше. У житті кожної людини може статись усе, що завгодно, але родина має бути на першому місці». Багато з того, що говорив Ясінський, закарбувалося в пам'яті назавжди. І я в різних ситуаціях постійно ловлю себе на думці: «А що сказав би В'ячеслав Андрійович?» або «Якби був живий В'ячеслав Андрійович, то...»

Коли його не стало, ніби якась струна в серці обірвалась і утворилась порожнеча, яку важко заповнити.

У моїй пам'яті В'ячеслав Андрійович назавжди залишиться світлим променем добра й людяності, взірцем Учителя.

Дякую Вам, дорогий В'ячеславе Андрійовичу, за те, що Ви були в моєму житті!

Аліна Воевода,

кандидат педагогічних наук, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського



Учитель, наставник, друг

Вперше я почув про В'ячеслава Андрійовича Ясінського у 1996 році, як про учителя загальноосвітньої школи-ліцею №7 міста Вінниця, який підготував призера Всесвітньої олімпіади з математики. З тих пір я цікавився здобутками В'ячеслава Андрійовича. Перечитав ряд статей з його авторством і вирішив познайомитись особисто. Так із 2000 року я став членом кафедри, алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету, де працював В'ячеслав Андрійович. Майже з перших днів я попросився відвідувати його пари.

Пояснення нового матеріалу студентам, відбувалось максимально доступно, разом із тим кожен важливий факт було доведено. До речі, майже на кожній парі була якийсь оригінальний жарт. Пригадується як одна із студенток, не встигнувши записати означення, просить повторити спочатку. На що В'ячеслав Андрійович каже «Здравствуйте, діти...» — далі сміх студентів.

Практичні заняття проходили в дуже цікавій формі. Досить часто дошку було поділено на чотири частини і біля неї працювало чотири студенти. В'ячеслав Андрійович казав мені, «... якби можна було б визвати більше студентів до дошки, то це потрібно було б робити...». Після ретельно оформленої на дошці задачі, студент пояснював її розв'язання. І тут, В'ячеслав Андрійович був дуже скрупульозним. Він так детально і акуратно розбирав задачу, що здавалося він хірург і робить операцію. Хоча і тут без жартів не обходилося. Під час одного з розборів В'ячеслав Андрійович ставить студенту «двійку», студент тим часом благає, «... ну В'ячеслав Андрійович я ж майже зробив, я ж зробив половину задачі...». На, що В'ячеслав Андрійович каже: «Я розкажу тобі одну історію, про половинчаті розв'язання» — і розказав. Ось вона.

В одне із патентних бюро, бюро де патентують винаходи, зайшов молодий чоловік, і каже, «Я винайшов пристрій, який з коров'ячого навозу робить вершкове масло, але для того щоб цей проект реалізувати мені потрібно 2 роки, 2 000 000 доларів, і щоб мене в цей термін ніхто не контролював. Вкінці кожного року про пророблену роботу я буду звітувати». Наукове товариство порадилося, і вирішило погодитись на умови цього чоловіка, масло треба, а сировини багато. Виділили 2 000 000, але тайно закріпили за ним шпигуна, щоб той за ним стежив і доповідав. Наступного дня шпигун доповідає: «Поїхав в турне на Мальдіви». Через 2 тижні: «Поїхав до Єгипту». І так цілий рік. В кінці року зібрався весь науковий бомонд в області виробництва вершкового масла, цей чоловік прийшов, до речі досить гарно одягнутий, вийшов на трибуну і заявляє. «Проїшло рівно половина часу, я використав рівно половину грошей, і зробив рівно половину роботи. Я довів навоз до такої кондиції, що його на хліб мастити вже можна, але їсти ще ні!». Після цього випадку я не чув більше від студентів слів, що задача майже розв'язана. Задача була розв'язана, або ні.

Окрім феноменальних своїх професійних здібностей В'ячеслав Андрійович, завжди був Людиною, як то кажуть, людиною з великої букви, патріотом. Патріотом своїх учнів, своєї кафедри, свого університету, нашої справи. Розповім про одну з подій, яка відбулася у останній Земний рік В'ячеслава Андрійовича Ясінського, і залишила значний слід в моїй душі. Це було перед міжнародною конференцією. Ми всі були зайняті на кафедрі її підготовкою. В'ячеслав Андрійович одягнувся вийшов, і прийшов десь через півгодини. Зайшов, повісив у шафу куртку, сів за стіл, дістав і поклав на стіл 500 гривень, і каже: «Виписав собі матеріальну допомогу — це на конференцію», і так з посмішкою: «А що? Кожен заробляє як може!»

Мені чомусь на думку спадає порівняння В'ячеслава Андрійовича Ясінського, українського учителя математики з італійським віртуозом-скрипалем Ніколо Паганіні. Такі як Ніколо Паганіні народжуються раз на тисячу років; я думаю, що такі учителі математики, як В'ячеслав Андрійович Ясінський, також. Але чомусь чиновництво не цінує їх талант — заздять, а може й бояться. «При жизни нет пророка в своем отечестве, Игорёк» — сказав у одній розмові зі мною В'ячеслав Андрійович.

Я дуже поважав і поважаю В'ячеслава Андрійовича Ясінського, завжди в ньому вбачав УЧИТЕЛЯ, наставника і друга. Мені здається, що найвищою є довіра до людини тоді, коли ти віддаєш їй на навчання власну дитину. Моя донька — учениця В'ячеслава Андрійовича Ясінського.

Ігор Калашніков,

*кандидат педагогічних наук, доцент кафедри алгебри і
методики навчання математики Вінницького державного
педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського*



Деякі спогади про Славка

Моє перше знайомство з В'ячеславом Андрійовичем Ясінським відбулося в кінці жовтня 1977 року, коли я працював старшим лаборантом кафедри алгебри і методики викладання математики. У вільну хвилину, я любляв піднімати гири (16 кг і 24 кг), оскільки ще в студентські роки займався важкою атлетикою і мав 1-й розряд. Якось я був один на кафедрі, в аудиторії 134 старого корпусу, і дістав гири, щоб позайматися. В цей час у двері постукали (я не встиг сховати гири) і зі мною привітався смаглявий симпатичний студент. Він запитав мене, де можна знайти Володимира Тихоновича Кулика, а потім помітив гири і запитав, чи можна йому спробувати їх підняти. Я не заперечував. Він спробував і зміг піднести гири лише кілька разів. Після цього я продемонстрував свої вміння, і ми з Славиком познайомилися. З цього моменту й почалися наші дружні стосунки. Згодом я запропонував Славіку перейти на «ти». Іноді він приходив до мене зі своїм другом, і ми потрохи піднімали гири.

В наступному навчальному році (1978–1979) Славик був уже на четвертому курсі і попросив В.Т. Кулика, щоб я надрукував йому дипломну роботу на дуже старій друкарській машинці. Я допоміг і надрукував дипломну Ясінському, а він згодом допоміг мені. Якось до мене звернулася одна вчителька математики з проханням розв'язати одну олімпіадну задачу з геометрії. Я кілька днів думав над розв'язанням задачі, а тоді вирішив звернутися до Славика. Він погодився мені допомогти. Наступного дня він приніс акуратно оформлене розв'язання задачі. Правда, довелося купити йому два пиріжки з горохом, але я був «врятованим» в очах вчительки математики.

Деяко пізніше я розповів Славіку про своє навчання на механіко-математичному факультеті Московського державного університету. Виявилося, що він теж після закінчення школи вступав на мехмат МДУ, але «погана біографія» завадила йому здійснити свою мрію. Далі мова зайшла про окремих студентів мехмату МГУ, з якими Славик познайомився на Всесоюзній математичній олімпіаді у 1974 році, і яких я теж досить добре знав. Славик з цікавістю, але водночас і певним смутком, слухав мої розповіді про викладачів мехмату, зокрема академіка Колмогорова А. Н., Смірнова Ю. М., Єфімова Н. В. та інших.

У 1985 році в журналі «Математика в школі» (№5) з'явилася перша задача В. А. Ясінського з геометрії для учнів IV–VIII класів «На

плоскости отмечены три вершины квадрата и разрешается применять центральные симметрии относительно взятых точек и точек, построенных при применении этих симметрий. Можно ли такими построениями получить четвертую вершину квадрата?»

Наступна задача В. А. Ясінського була опублікована в журналі «Математика в школе» №6 за 1985 рік. Надалі до 1990 року він публікував у цьому відомому на весь Радянський Союз журналі декілька авторських задач на рік.

Також Славик любив розв'язувати задачі, надруковані в цьому журналі. Так, наприклад, в № 1 за 1990 рік опублікована «Сводка решений задач №3 за 1989 год». В. Ясінський розв'язав усі 20 задач (№3321–3340), впевнено зайнявши I місце за кількістю розв'язаних задач. В №2 за 1990 рік В. Ясінський також розв'язав усі 20 задач (№№3341–3360). До речі, друге місце посів Бевз Григорій Петрович, який не розв'язав лише задачу №3358.



Із М. В. Миронюком

Михайло Миронюк,

кандидат педагогічних наук, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського



Багатогранна особистість

Минає рік, як не стало нашого дорогого В'ячеслава Андрійовича. І не віриться, що більше не побачиш його — завжди бадьорого, підтягнутого, з привітною посмішкою на устах.

З ним, бувало, зустрічалися на трамвайній зупинці, коли поспішали на роботу, а іноді разом поверталися трамваєм додому і всю дорогу могли обговорювати якусь задачу.

Вперше ми з Славком зустрілися у 1994 році, коли я повернувся з міста Рівного в наш рідний педагогічний інститут, в якому навчався, а

потім працював на кафедрі математики з 1964 по 1975 роки. Долі наші дивно перепліталися. Під час однієї з розмов виявилось, що Славко три роки (з 1979 по 1982 р.) працював в СЗШ №1 м. Могилів-Подільського, яку я закінчив у 1956 році.

Ім'я В'ячеслава Андрійовича відоме не лише в Україні, але й далеко за її межами — в колах, пов'язаних з математичним олімпіадним рухом. Він автор ряду цікавих праць з методики розв'язування олімпіадних задач. Славко був багатогранною особистістю: не лише чудовим творцем красивих задач в елементарній математиці



Із В. С. Гарвацьким, 2006 р.

(особливо геометричного змісту), а також прекрасним сім'янином, чудовим кулінаром (згадую часто радився з цього приводу і з Куликом В.Т. та моєю дружиною Буравель Л.П.), завзятим любителем парної, душею і тамадою кожної вечірки.

В'ячеслава Андрійовича дуже поважали і любили студенти. І навіть цитували його висловлення (згадаю лише таке: «У кожного Додика своя методика»).

Славко, по суті, був душею і обличчям кафедри алгебри і методики навчання математики і він назавжди залишається з нами.

Володимир Гарвацький,

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського



Я все ще чую його голос...

Є такі люди, які входять не лише в наше життя, а й у серце, у саму душу та залишаються там уже навіки. Уже минув рік, як передчасно пішов із життя В'ячеслав Андрійович, але досі у мене в голові звучать його слова, його крилаті вислови... І досі дуже часто у різних ситуаціях ловлю себе на думці: «А що сказав би В'ячеслав Андрійович?»

...Сісти і записати спогади... Здається, що може бути простіше, адже знала цю людину більше двадцяти років (як же важко усвідомлювати, що знала). Але виявляється це не так просто...

Є про що згадати, багато подій, як кадри з цікавого фільму, пропливають перед очима.

Хоча я й навчалася у Вінницькому державному педагогічному інституті на фізико-математичному факультеті, але так склалося, що В'ячеслав Андрійович у мене нічого не читав як викладач. У свої студентські роки я запам'ятала В'ячеслава Андрійовича як турботливого батька. У той час ми жили в одному мікрорайоні і я мала змогу спостерігати за В'ячеславом Андрійовичем в оточенні трьох чорнооких красунь донечок.

Він дуже цінував сім'ю, родину, сімейні цінності, традиції і навчав цьому студентів та нас, молодших колег. В'ячеслав Андрійович навчав нас життю, хоча інколи його уроки було важко зрозуміти, сприйняти через призму своїх власних ідеалізованих поглядів на життя.

Я захоплювалася цією людиною... Його надзвичайним інтелектом, високою працьовитістю, жагою до знань, життєрадісністю, хазяйновитістю, його вмінням творити. А чого варті були його різні методичні прийоми, нестандартні підходи

до вирішення усякого роду педагогічних та життєвих проблем! Коли я вперше була асистентом у нього на екзамені, я була вражена, як він майстерно міг поставити кожному студенту оцінку, так, що у студента не могло навіть виникнути сумніву, що викладач йому завищив, чи занижив оцінку.



Із Л. Й. Наконечною, 2012 р.

В'ячеслав Андрійович залишиться у моїй пам'яті яскравою, багатогранною особистістю, наставником, який вчив життю, підтримував мене в радісні і сумні хвилини життя.

Дуже шкода, що такі люди покидають нас надто рано. Світла йому пам'ять!

Людмила Наконечна,

*кандидат педагогічних наук, доцент кафедри алгебри і
методики навчання математики Вінницького державного
педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського*



Згадуючи нашого В'ячеслава Андрійовича

Уперше В'ячеслава Андрійовича Ясінського я побачив у вересні 1995 року на представленні викладачів фізико-математичного факультету студентам-першокурсникам. Декан факультету Рокіцький Іван Олександрович, жартував, що такого кремезного чоловіка навряд чи хтось зіб'є з ніг на коридорі. Дійсно, статний викладач із білосніжною посмішкою заслуговував на увагу. Ще більше уваги він заслуговував у нас, першокурсників, на парах з елементарної математики. Насамперед, нас приваблювало не відмінне знання математики і вміння нас навчити, а стиль проведення занять. Вражав його потужний арсенал жартів, більшість із яких (лише згодом ми починали це розуміти), ілюстрували прості життєві істини.

У 2002 році я став колегою В'ячеслава Андрійовича по кафедрі. Для мене відкрилися нові грані його широкої, талановитої і неповторної особистості, адже він став мені не лише наставником, але й старшим товаришем.

Мене дуже захоплювала його здатність легко сходитись із людьми. Навіть із малознайомими, або зовсім незнайомими, він поводив себе так, як ніби був їх найкращим другом і знав їх вже дуже багато років. Мабуть, людей підкупала його щира посмішка, відвертість, ерудованість та, головне, вміння вислухати та чимось зарадити.

Захоплювався я також і його фундаментальністю у підходах до будь-якої справи. Починаючи із його знань з математики та вимог до оформлення задач, і закінчуючи звичайними побутовими справами. Ще зі

студентства я пам'ятаю слова В'ячеслава Андрійовича: «Ви повинні вміти викладати свої думки на папері». І, вже будучи не один рік колегами на кафедрі, В'ячеслав Андрійович все одно вимагав з мене повне, належним чином оформлене, розв'язання тієї чи іншої задачі. У випадку якоїсь покупки чи ремонту, він завжди консультувався із знайомими фахівцями, а вже потім робив свій вибір. Навіть до гастрономічних питань не припустимо було підходити у В'ячеслава Андрійовича абияк. «Можно и карамельками, так сказать, но это уже совсем другой вопрос...» — звучало із його уст у випадку недотримання гастрономічних правил чи рецептури.

...Уже минув рік, як В'ячеслава Андрійовича не стало. Проте його світлий образ завжди буде залишатися у моїй пам'яті. Я завжди пам'ятатиму його щирі усмішки, його жарти, його бажання чимось допомогти, зарадити...

Олег Коношевський,

кандидат педагогічних наук, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Спогади друзів — колег з університету

«Немає смерті. І не ждять — не буде.
Хто хоче жити, ніколи не помре...»

Ці рядки Василя Симоненка можна взяти епіграфом до життя В'ячеслава Андрійовича Ясінського. Він дуже любив цей світ, ніби «випивав» життя щодня до краплинки, як келих цілющої води.

Він наче випромінював світло, радів усьому щиро і завжди. Гарний, добрий, теплий, абсолютно земний. Без посмішки не бачила його ніколи. Після короткого привітання відразу переходив до опису життєвих подій і завершував розмову зазвичай смішним анекдотом.

Це картинка в пам'яті з останніх літ.

Але, сподіваюсь, знаю і розумію його душу трохи глибше.

Працювали разом на факультеті підготовки вчителів початкових класів у ті далекі 80-ті роки, коли були молодими, в міру амбітними, нетерпляче-швидкими і планували змінити життя навколо себе.

В'ячеслава Андрійовича дуже любили наші студенти. Я збоку спостерігала за їхніми стосунками і дивувалась. Викладачем був вимогливим, принциповим, непідкупним. Хвалив студента тільки за гарний результат інтелектуальних зусиль. Сварив за лінощі регулярно. Скласти математику йому було ой як нелегко. Треба було попотіти.

Але повторюсь: студенти щиро любили свого викладача математики. Навіть боготворили. Сьогодні, з висоти прожитих літ, почала розуміти його професійні «секрети».

В'ячеслав Андрійович ніколи не принижував студентів своїм математичним даром. У нього дійсно був дар Божий до математики. Але він ставився до цього легко, без пихи і гордині. Ніколи «не демонстрував» себе — натомість дарував нашим «промокашкам» щастя інтелектуальної перемоги і гартував здатність до сміливих рішень. А ще студенти добре відчували «справжність» свого розумного викладача і знали ціну його справедливості (на відміну від сьогоднішніх «фейкових» цінностей). Уже тоді, змолоду, В'ячеслав Андрійович був дивовижно мудрим учителем.

Його щиро любили на кафедрі, що об'єднувала тоді викладачів методик, філологів, природничників, музикантів, художників... З кожним умів підтримати розмову, зрозуміти його проблеми, розрадити у горі. Допомагав усім безвідмовно.

Жіноцтво на кафедрі ставилося до нашого математика особливо трепетно, щиро захоплювалось неординарним поєднанням розуму і чоловічої краси. Утім В'ячеслав Андрійович був однолюбом, завжди із захопленням розповідав про дружину Катю, про своїх чарівних донечок. Найкращим місцем на землі для нього була його родина. Знаю, як доглядав він своїх дівчаток. Кращого батька я в житті не зустрічала.

Слава... Яке влучне мав ім'я! Знане воно в нашому університеті, в області, в Україні. Його талановиті учні славлять це ім'я за межами країни. Нехай ніколи не згасне пам'ять про нашого славетного колегу.

Галина Тарасенко,

доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри дошкільної та початкової освіти Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського



Я безмежно вдячний долі, що в своєму житті мав можливість спілкуватися з такою цікавою, розумною, доброю людиною «з великої букви», якою був В'ячеслав Андрійович. Він був для мене не просто колегою і другом, він був мені як старший брат, людиною, перед якою можна було відкрити душу і не боятися, що в неї залізуть з навіть добре вимитими ногами. Славик завжди мав час вислухати, порадити, допомогти. Це був справжній друг, а друзі, як відомо, перевіряються не тільки в моменти радості, а насамперед в біді. «Если друг оказался вдруг, и не друг, и не враг, а так...», пригадуєте В. Висоцького, на кращих піснях якого переважно виховувалось наше покоління.

Різниця в роках у нас була невелика. Вперше ми зустрілися і познайомилися в 1977 році, коли я вступив до ВДП ім. М. Островського на фізико-математичний факультет. Спочатку наше знайомство несло більше заочний характер. Я і багато моїх однокурсників-першокурсників дізналися, що на відділенні математики навчається дуже сильний студент, який вміє розв'язувати практично всі математичні задачі. Підтвердження цьому я отримав після розмови з його вчителем Сергієм Сергійовичем Яровим. В той час я підробляв лаборантом в лабораторії обчислювальних машин (№124, 1-ий корпус), а Сергій Сергійович разом з іншими в свій час створював цю лабораторію. Він часто заходив туди. В той час він підняв питання на кафедрі про неправильне трактування оберненої функції в шкільному підручнику з алгебри і початків аналізу. Простою заміною змінних X та Y у математичному виразі не можна отримати обернену функцію. Потрібно враховувати зв'язок між множинами значень змінних X та Y . Як стало відомо пізніше, це сталося і за участі Славіка Ясінського, про якого Сергій Сергійович мені якось сказав: «Я могу выпить с «Мирчей» (Славик Совков), а вот Ясинскому я пить запрещаю! А знаешь почему? Потому что он — ГО-ЛЮ-ВА!» Сергій Сергійович поряд з іншими викладачами зіграв велику роль в житті Славіка (учня сільської школи, учасника і переможця всесоюзних олімпіад з математики), становленні його як математика-професіонала.

Наше очне знайомство розпочалося з фізматівської читальної зали гуртожитку №3, репетицій до звітних концертів фізмату (я брав участь в театрі естрадних мініатюр, а Славик був солістом знаменитого ансамблю «Дубки»), занять спортивної секції з самбо і, звичайно ж, лазні... Згадую,

як вміло Славік працював віником — саме він привив мені любов до сауни.

Він умів розв'язувати задачі не тільки з математики, йому також подобались фізичні задачі. Загалом, Славік був дуже вимогливий до розв'язувань задач. Розв'язання повинні були бути чіткими, оригінальними. Він часто звертав увагу саме на доведення правильності розв'язку.



В'ячеслав Андрійович А. Ф. Недибалюк з В. А. Ясінським (2015 р.) намагався відстоювати свою думку в дискусіях, при вирішенні суперечливих питань. Згадую, як під час лікування пневмонії і після нашого відвідування між ним і сусідом по палаті — пастором однієї із сект — виникла дискусія щодо вживання алкоголю. Пастор доводив, що релігія забороняє вживати спиртне. В'ячеслав Андрійович спеціально перечитав Біблію і привів слова святого апостола Павла щодо хвороби: «...Не пий лише воду. Вживай потроху й вино. Це корисно для шлунку, і ти не будеш так часто хворіти!»

Він був різносторонньо-розвиненою особистістю і міг дати багато корисних порад по господарству, а окремим жінкам — фору в приготуванні страв та консервування. Але неперевершеним він був у математиці. Коли мій син Олег перейшов до 7-го класу, я помітив, як у нього знизилася бажання розв'язувати задачі з математики шкільної програми (і це після перемоги в 6-му класі у міській олімпіаді). Звичайно ж, я звернувся до Славіка і він порадив: «Його потрібно озадачити! Він повинен відчувати відповідальність за виконання поставлених завдань. Спробуй записати його до заочної фізико-технічної школи при МФТІ». Це спрацювало. Олег у 8-му класі став призером олімпіади з фізики, а потім вступив до фізико-математичного ліцею КНУ ім. Т. Шевченка. Далі були вступ до радіофізичного факультету, магістратури, аспірантури та захист кандидатської дисертації. Коли Олег приїздив додому на канікули, він ходив до В'ячеслава Андрійовича, щоб покращити свої

знання з математики. Одного разу на запитання, чому він повернувся такий веселий, відповів: «Дядя Славик розсмішив. Дав нам задачу, яка всім здалася дуже легкою і розв'язали ми її неправильно. А хлопці, які готувались до олімпіади, почали доводити протилежне. І тут дядя Славик не витримав і склав нам комбінацію з трьох пальців, детально пояснивши, як потрібно розв'язувати цю задачу». Я одразу ж згадав С. С. Ярового і його звичку реагувати на подібне саме таким чином. До речі, почуття гумору завжди допомагало Вячеславу Андрійовичу в житті не опускаючи руки, боротися і перемогати.

Він знав багато анекдотів і умів їх смачно розповідати. Для нас стало майже традицією обмінюватися свіжими анекдотами: «Ось, послухай, новий, привіз з Одеси, був у Решілівському ліцеї, хлопці розповіли...». Бувало ми провідували В. М. Коряка і частину цих шедеврів народного гумору він записував у віршованій формі.

Традиційним для нас було обговорення поїздок на олімпіади, турніри. Пам'ятаю, як в мене виникли труднощі із задачами, які я запропонував для олімпіади з фізики. Те розв'язування, яке я пропонував вимагало знання властивостей тригонометричних функцій, застосування похідної. Славик, який дуже добре знав шкільний курс математики і шкільну програму, заспокоїв мене: «Не хвилюйся, ці задачі цікаві і можуть бути використані для учнів 8-го та 9-го класів. В цій задачі використай подібність трикутників або ж теорему Фалеса, тому що функцій синуса і косинуса вони ще не вивчали. В іншій задачі на екстремум можна обійтися і без використання похідної». В нього був великий дар «бачити» задачу. Він уміло їх створював. Його авторські задачі пропонувалися на Всеукраїнських та Міжнародних олімпіадах. Його збірники з методичними порадами щодо розв'язування і підготовки до олімпіад стали золотими скарбничками для учнів, вчителів, науковців.

Ми часто разом із Славиком поверталися з університету. Якось ми зайшли до нього додому. Той, хто був у його кімнаті, напевно помітив велику кількість нагород (грамот, дипломів, подяк). Про них він розповідав мені з особливою теплотою і любов'ю, оскільки це була частина його життя: «Ось цей комп'ютер мені подарував Паша Пилявський після перемоги на Соросівській олімпіаді (це був його другий такий приз)». Пригадав Вячеслав Андрійович і те, як його та інших вчителів, що підготували переможців міжнародних олімпіад, нагородили

набором дидактичних матеріалів... Ми згадали студентські роки і Славів взяв в руки гітару: «Нам в столовой суп подали, а в тарелке волос плыл, где найти такую столову, чтобы повар лысым был?», «А в созвездии Волопаса там историки живут, все планеты обкопали, что-то ищут — не найдут...», «Протопи ты мне баньку по-белому...», «Ніч яка місячна, зоряна ясная...».

В той день ми поверталися з університету теж разом... Славів розповідав про поїздку на Всеукраїнський учнівський турнір юних математиків, ділився своїми враженнями. Здається, ми зустрілися з В. М. Костюкевичем, який пожартував: «І чого це тут ходять крупні математики і фізики?». Ми ішли по доріжці, що вела від спортивної зали. Славів одразу ж знайшовся: «Так от втоптуємо щебінь, може нарешті її заасфальтують!..» Ми на мить зупинилися і Славів попросив зачекати: «Дихати не дає щось... Отак іду, буває, зупинюся, віддыхаюся і далі...» Я сказав, що потрібно підлікувати серце... «Ну от закінчиться семестр — і я займусь своїм здоров'ям, а то весь час ніколи...» Він згадав математичний семінар «Кенгуру» у Карпатах: «Це те місце, де я почуваюсь найкраще і гарно відпочиваю, оздоровлююсь... Лекцію відчитав — і вільний... Навкруги спокійно, природа, річка, ліс, чисте повітря... Там мені дихається так легко...» Ми їхали трамваем. Він кілька разів дзвонив по телефону дізнатися, де буде відбуватися олімпіада з математики, щоб провести профорієнтацію серед учнів. Розпитував про мої справи. Був задоволений, що йому нарешті підписали контракт на цілих 5 років і не буде турбувати питання чи дадуть допрацювати до пенсії... Ми попрощалися... Він потис мені руку і сказав: «Ну, будь здоров, Толік...» Я дивився йому вслід із вікна трамвая і якесь дивне відчуття мене охопило... Тоді я не знав, що бачу його живим востаннє...

Анатолій Недибалюк,

*старший викладач кафедри фізики і методики навчання фізики,
астрономії Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського*



В'ячеслав Андрійович був людиною ерудованою, всебічно розвиненою. Коло його інтересів було досить широким: видатний математик, методист, учитель-новатор, знаний в Україні та за її межами...

Я хочу торкнутися ще однієї грані його творчості — це любов до пісні. Досить часто у колі найближчих друзів і колег В'ячеслав Андрійович просив дати йому гітару. І тоді у його майстерних руках народжувалися акорди, а ніжний сріблястий голос видавав справжні шедеври. Він дуже любив українські народні пісні та романси на вірші С. Єсеніна. В'ячеслав Андрійович дуже любив пісню «Вербовая дощечка», бо, будучи студентом, співав її у студентському хорі під керівництвом Миколи Плашкевича.

Дорогий друже, колего, особисто для мене у світі поменшало відданих, надійних людей. Але твої добрі справи, твоя турбота про людей, свою родину не дають нам підстав забувати про тебе.

В'ячеславе Андрійовичу, ми дуже сумуємо за тобою, хоча і розуміємо, що сльозами горю не зарадиш. Тому, рідний, я у щоденній молитві молю Бога за упокій твоєї душі і думаю, що ти нам всім порадив би згадувати тебе словами пісні:

На могилі моїй посадить молоду яворину.

І не плачте за мною, за мною заплаче рідня.

Я любив Вас усіх, та найбільше любив Україну.

Видно в тому і є та найбільша провина моя.

Раїса Загоруй,

*кандидат педагогічних наук, доцент кафедри дошкільної та
початкової освіти Вінницького державного педагогічного
університету імені Михайла Коцюбинського*

Спогади друзів та учнів В'ячеслава Андрійовича

Моєму Вчителю

Формально я ніколи не був учнем В'ячеслава Андрійовича. Жодного уроку, жодної пари, та, власне, перше знайомство було заочним.

Від старшого брата я знав, що у Вінниці живе унікальний математик, знав, що вони товаришують іще зі студентських часів, що збираються й розв'язують задачі із журналу «Квант». Особисто ми познайомились з Учителем в кінці серпня 1988 року. Я шукав роботу. Виявилося, що СШ №17 м. Вінниці має вакансію вчителя математики, і запросили туди В'ячеслава Андрійовича. Час минав, а відповіді від нього не було. Тодішній директор запропонував мені зустрітися з В'ячеславом Андрійовичем і дізнатися про його рішення. Мені дали адресу, за якою мешкало на той час подружжя Ясінських, і я іду на перше побачення. У самого все тремтить. Ну що я скажу людині, яку побачу перший раз у житті? З порогу, напевно, запитаю: «То йдете Ви на роботу в 17 школу, бо є проблеми із комплектацією кадрів?»

Даремно я хвилювався. Двері мені відчинив кремезний дядько (до цього я не уявляв статури В'ячеслава Андрійовича) у фартусі і весь у манній каші. Миттєве полегшення. Мені завжди казали, що великі і товсті люди дуже добрі. Виявилося, що це тато годує найменшу доньку. Недовгою була розмова, яка закінчилася фразою: «Я вже своє ім'я в місті маю, а тобі це ім'я іще заробляти. Давай у цьому році йди в 17 школу ти, а я прийду наступного року». Отже, з першої зустрічі ця Людина зіграла одну з визначальних ролей у моїй появі в 17-й школі.

Так і сталося. Рівно через рік колектив школи поповнився іще одним учителем математики. Без перебільшення, В'ячеслав Андрійович став для всіх тодішніх колег-математиків школи справжнім Учителем. Досвідчені колеги радились із ним, перевіряли на ньому свої педагогічні підходи до викладання математики, а я вчився. Я шукав зустрічі щоразу, коли В'ячеслав Андрійович з'являвся у школі, адже кожним сказаним реченням він навчав. Навчав методам розв'язування задач, педагогічним прийомам, різноманітним педагогічним хитрощам, а головне — він навчав жити. Правильно жити. Жити, а не проживати. Жити, а не виживати,

хоча і виживати теж вчив. Важко навіть сьогодні згадувати, як «легко» було молодому вчителю працювати в колективі «метрів» однієї із кращих шкіл України. І ось тут на допомогу щоразу приходив він: консультант, експерт, Учитель. Принципові розмови розпочиналися фразою: «Сідай, пацанюра, давай папірця, ручку і дивися, як це робиться».

З роками наші стосунки змінювались, і вже останніх років двадцять стали близько дружніми. Родини, діти, здоров'я, значення м'яча під час футбольного дербі, спільні друзі, підготовка до олімпіад, «свіжі» задачі і, звичайно, влучні анекдоти...

І ось цей ранішній дзвінок. Ніякого здивування, адже взаємини дозволяли пізно-нічне та рано-ранішнє спілкування. Звичне вітання, а у відповідь: «В'ячеслав Андрійович помер...». Іще треба щось далі?

Минув лише рік. Я глибоко переконаний, що іще ніхто, до кінця, не усвідомив що трапилось. Сьогодні гірко, боляче, не зрозуміло навіть так жорстоко. Але коли прийде остаточне розуміння значущості втрати, то біль цієї втрати лише піднесеться до степеня. Особисто я втратив не лише друга, колегу, Вчителя. Я іще втратив охоронця. Свого охоронця, охоронця моїх дітей.

Петро Пасіхов,

*учитель математики фізико-математичної гімназії №17
м. Вінниці*



Ми були знайомі з В'ячеславом Андрійовичем не так довго, лише з півтора десятка років. Вперше зустрів, побачив і відчув цю колоритну багатогранну особистість на кафедрі математики та методики навчання математики НПУ імені М. П. Драгоманова. В цей же вечір ми перейшли на «ти» і решту життя дружили. Потім були спільна робота в журі всеукраїнських олімпіад, співпраця на кафедрі алгебри і методики навчання математики, дружні вечери, тривале спілкування...

Ким була, є і залишиться для мене ця непересічна, надзвичайно добра і порядна людина, яка дбала більше про інших, ніж про себе? В останньому я не один раз переконувався на власному досвіді.

В першу чергу, В'ячеслав Андрійович був віртуозний професіонал, який умів пробудити інтерес, захопити ідеєю, подарувати учню радість



В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко і М. В. Працьовитий в роботі журі студентської олімпіади з математики (2012 р.)

відкриття. Будучи сам закоханим в елементарну математику, причаровував нею інших. Він любив «красиву задачу», вмів творити задачі і вмів з відомої задачі зробити невпізнаванну.

Яскравою особливістю Славіка були Відвертість, Чесність, Тверезість і Об'єктивність в оцінці обставин і подій, людей і вчинків. Він давав доброзичливі поради друзям, колегам, молоді. Один раз я проігнорував його пораду, яка стосувалася одного «геніального» випускника ВДПУ, про що буду жалкувати, напевно, все своє життя. А він мене попереджав.

Неперевершений гумор і вміння розповідати анекдоти та бувальщини робили його неповторним і притягальним. А робив він це завжди по-новому, пафосно, з новим емоційним забарвленням і постійно з усмішкою. Це заняття — дарувати людям радість і гарний настрій приносило йому життєву насолоду. Занурюючись в атмосферу гумору, напевно, він відпочивав від буденних проблем, безпощадності часу і жорстокості світу.

Шановний Колего, в тебе багато часу, тому хочу дати тобі домашнє завдання: знайди вираз загального члена послідовності натуральних чисел, заданої рекурентною формулою $c_{n+1} = c_n(c_n + 1) + 1$ і центр мас трахтібідоха з ребром $\sqrt{\pi}$ і радіусом діагонального перерізу 13^e .

Споживай, Любий Друже. Спасибі за те, що ти був з нами, намагався світ і нас зробити кращими, досконалішими, чуйнішими і

благороднішими, дарував радість загальнолюдськими, педагогічними та суто математичними засобами.

Здається віє той же вітер,
І сонце Вінницьке блищить.
Не хоче розум тільки вірить,
І серце болісно щемить.

Відкривши двері в наші душі,
Ти поселився в них навек.
Любив життя, а нас зворушив
Та світ забрав тебе торік.

Пульсує час, думки і мрії,
лишивши в пам'яті події.
Душа на гребені емоцій
Знаходить спокій свій
пророчий...

Микола Працьовитий,

*доктор фізико-математичних наук, професор Національного
педагогічного університету імені М. П. Драгоманова*



Светлой памяти
моего любимого учителя математики
Вячеслава Андреевича Ясинского
посвящается.

Я много слышал о Вячеславе Андреевиче задолго до того, как мы с ним лично познакомились и он стал моим учителем. Мои родители-педагоги знали его много лет, он преподавал математику и у моей старшей сестры Лены. Все относились к Вячеславу Андреевичу с уважением, и я был очень рад, узнав, что преподавать математику у меня, семиклассника школы №15 будет, именно он. Я очень любил этот предмет, знал о достижениях многих талантливых учеников Вячеслава Андреевича, знал о его отношении к своему учительскому труду и очень волновался, идя к нему на свой первый урок. В мой математический класс к Вячеславу

Андреевичу потянулись и ученики из других школ — Марат Рвачёв и Виктор Андрющенко из школы №18, Рома Мучник из школы №21. С Ромой мы впоследствии очень подружились и просидели в итоге за одной партой до самого окончания школы. Сегодня я вспоминаю и тот далекий 1989 год, когда вслед за Вячеславом Андреевичем и своими одноклассниками Ромой Мучником, Маратом Рвачёвым, Александром Скрипкинским, Сергеем Ильчуком и Виктором Андрющенко я перешел школу №17, ставшую в 1991 году физико-математической гимназией №17. Без всякого сомнения, свой существенный вклад в присвоении школе №17 этого почетного статуса внес и наш заслуженный учитель — Ясинский Вячеслав Андреевич.

Все мы, его ученики и в 15-ой, и в 17-ой школе, очень любили и уважали Вячеслава Андреевича. Он был не просто преподавателем нашего любимого предмета, а был настоящим педагогом, наставником и другом. Он искренне желал, чтобы мы, его «дети», не только хорошо знали его предмет, но старался максимально подготовить нас к взрослой жизни, научив думать, анализировать, искать все возможные варианты решения задачи и выбирать наилучший, учил нас проявлять упорство в достижении цели, относится к небольшим неудачам со спокойствием и твердой уверенностью, что, проявив настойчивость и трудолюбие, всегда можно найти правильное решение даже самой сложной задачи.

Вспоминается такой случай. Однажды на уроке мы решали очень сложную задачу из сборника задач под редакцией Сканави. Вячеслав Андреевич очень любил этот задачник, поскольку уровень сложности представленных в нем задач задавал для его учеников такую планку, дотянувшись и преодолев которую, поступление в ведущие ВУЗы страны, тогда еще огромного СССР, становилось задачей по плечу. Задача, которую мы решали в тот день, была из новой темы и Вячеслав Андреевич, стоя у доски два урока к ряду (у нас были спаренные уроки, как в ВУЗах), мелом аккуратно выводил решение, все подробно объясняя и следя, чтобы мы все записывали. В конце пары был получен ответ, и Вячеслав Андреевич торжественно вывел его на доске, дважды подчеркнув мелом. Каково же было и его и наше учеников удивление, когда ответ на доске и ответ на последних страницах задачника, зачитанный Вячеславом Андреевичем вслух, к сожалению, не совпал. Вячеслав Андреевич внимательно прошелся по записям по доске, но сходу

обнаружить ошибку не удалось, а время урока заканчивалось. Вячеслав Андреевич с присущим ему чувством юмора, смущаясь, произнес: «Сегодня, дети, я показал вам как не надо решать задачу. На следующем уроке я вам покажу, как это сделать правильно». Всем было понятно, что такие ошибки — редчайший случай в практике Вячеслава Андреевича, но все уже ждали следующего урока. На следующий день снова, проведя у доски более часа, Вячеслав Андреевич аккуратно вывел на доске решение задачи и записал ответ. Зная еще со вчерашнего дня правильный ответ, он все равно открыл последние страницы задачника Сканави М. И. и выполнил проверку. Затем, посмотрев на класс и, улыбнувшись, сказал: «Вот теперь все правильно!». Мы все тоже заулыбались, помня вчерашнюю неудачу.

Это был наглядный пример, как надо идти до конца, не сдаваться и искать правильные решения.

Вспоминается и такой редкий случай на наших уроках, когда Вячеслав Андреевич, решая сложнейшую задачу по стереометрии, забыл формулу, а точнее ее часть. Он постоял у доски, написал фрагмент формулы, подумал, вытер, снова написал, снова посмотрел, задумавшись. Через минуту он подошел к столу, открыл на нужной странице книгу и подсмотрел формулу. Мы, конечно же, не могли не прокомментировать произошедшее. Вячеслав Андреевич, спокойно и уверенно ответил: «Дети, у меня голова ведь не мусорный ящик, чтобы все запоминать. Эта формула используется в решениях очень редко и немудрено, что я ее подзабыл. Но я знал, где её можно подсмотреть! Самое главное, чтобы вы, как и я, научились пользоваться литературой. Это очень важно! Запомните дети!».

Так говорил наш учитель, и мы это, конечно же, запомнили и взяли на вооружение.

Когда Вячеслав Андреевич хотел акцентировать на чем-то особенное внимание, чтобы мы обязательно запомнили, он говорил: «Вы должны это выучить так, чтобы я ночью вас разбудил, и вы мне без запинки все повторили!».

Наши уроки всегда были очень содержательны и интересны. Наш учитель отдавал все свои силы, чтобы научить нас чему-то новому, закрепить уже полученные знания, подготовить нас к будущим вступительным экзаменам в ВУЗы. Вячеслав Андреевич всегда умел

найти нужный момент для паузы в напряженном процессе обучения, вспомнив какую-то жизненную ситуацию, относящуюся к теме, вспомнив какой-то смешной или анекдотичный случай, однако всегда мог снова перейти делу, вернув нас в рабочий настрой.

Когда он видел, что кто-то из учеников-старшеклассников мыслями не на уроке, он с шуткой спрашивал: «Что, задумался о своей Марусе?», и тут же добавлял: «Возвращайся к нам! После урока будешь думать». Для девочек фраза была про «Ванюшу». Такие замечания всегда вызывали улыбки класса, но никто, ни разу не обиделся на справедливые замечания учителя.

С теми ученикам, которые особо ценили его чувство юмора и доброту, Вячеслав Андреевич мог пошутить и по-особенному. Если ученик своей многословностью уходил в сторону от темы урока или от обсуждаемой проблемы, то можно было услышать: «Что ты мне тут баки забиваешь?», а если утверждения были очевидно сомнительны, то звучала, так полюбившаяся лично мне, фраза: «Это ты своей бабушке расскажешь, она тебя очень любит, она тебе поверит!». Класс в такие моменты взрывался от смеха. Смеялись мы от души и после фразы: «Здравствуйте, я ваша тетя, я буду у вас жить и питаться!», когда ученик делал неверное утверждение по ходу решения задачи и настаивал на таком утверждении, даже после замечания. Мы знали, что добавленные Вячеславом Андреевичем к знаменитой цитате из одноименного фильма слова «и питаться», были призваны усилить эффект от неожиданного появления незваной тети и сложностей с ее пребыванием. Мы очень ценили огромное чувство юмора нашего любимого учителя.

Помнится и такой интересный эпизод из наших уроков, когда Вячеслав Андреевич сделал замечание одному из учеников, попытавшемуся на основе в целом правильных аргументов сделать неправильные выводы. Учитель на это нарушение логики рассуждений привел и свой, не менее яркий, пример: «Я — Вячеслав Андреевич? Сейчас за окном идет снег? Отсюда делаем вывод, что сегодня — четверг!».

Все это было и смешно и очень поучительно. Эту историю я запомнил на всю свою жизнь и не раз вспоминал её с улыбкой и благодарностью.

Пролетели годы, почти три десятилетия, но в памяти всё сохранилось так, будто было только вчера. Никогда не забудутся увлекательнейшие уроки по алгебре и геометрии, интереснейшие уроки по стереометрии с

рисунками на половину листа тетради («Хороший, большой рисунок — половина успеха в решении задачи» — говорил нам не раз, чтобы мы обязательно запомнили, наш учитель), домашние задания на отдельных двойных листах в клеточку, подготовки к олимпиадам, поздравления призеров районных, городских, областных, республиканских, всесоюзных олимпиад по математике, поздравления победителей задачника научно-популярного журнала «Квант».

Спасибо Вам огромное, уважаемый Вячеслав Андреевич, за это общение с Вами, за все полученные от Вас знания, за пример трудолюбия и преданности своему делу, за образец стремления к наивысшему результату, веру в человеческие возможности, привитую Вами внутреннюю потребность ставить перед собой высокие цели и стремление к их достижению, за Вашу отцовскую любовь и заботу. Мы всегда будем вспоминать Вас с теплотой... Вечная Вам память!..

Сергей Костюк,

благодарный ученик Вячеслава Андреевича



Вячеслав Андреевич Ясинский задал вопрос: «Чем отличается чистый от чистейшего?». Ответ был: «Чистый — это чистый носок, а чистейший — это наименее грязный носок из кучи грязных носков». Таким образом он объяснял нам разницу между абсолютным и сравнительным утверждением.

Вячеслав Андреевич Ясинский был выдающийся учитель, который мог обучить любого ученика. Он знал как найти правильный подход чтобы объяснить, иногда используя грубый подход. Я до сих пор помню:

$$\cos(M + \mathcal{K}) = \cos(M) \cos(\mathcal{K}) - \sin(M) \sin(\mathcal{K}).$$

Его способность найти что-нибудь интересное или забавное в предмете заставляла ученика слушать и запоминать.

Он научил меня верить в себя, что не существует задачи, которую я не мог бы решить.

Вячеслав Андреевич любил геометрические решения. Он считал, что рисунок даёт определенную глубину, которую нельзя извлечь из алгебраического решения. К сожалению, я не имел таланта видеть

построения, которые он находил, и это для меня всегда оставалось загадкой.

Он был человеком сильного характера и высоких принципов, и он был показателем лучшего в мире. Хотя я не хочу говорить «был», я хочу сказать «есть», потому что он будет жить всегда в нашей памяти и наших сердцах.

Роман Мучник,

*благодарный ученик Вячеслава Андреевича,
доктор философии по математике*



Когда Вячеслав Андреевич пришел к нам в класс, он ввел правило о том, чтобы все мальчики приходили в его класс в галстуках начиная со следующей недели. Мы понимали: чтобы было серьезное отношение к предмету и атмосфера в классе. В 17 школе в нашем классе практически никто не носил пионерских галстуков, кажется, уже в 7 классе, то есть он имел в виду мужские галстуки. Всем мальчикам пришлось срочно просить галстук у пап. Перед следующим классом на перемене мы одели галстуки. У всех были обычные разные галстуки, но у одного одноклассника был галстук из синей-в-фиолетовый-горошек широкой шелковой ленты связанный в форме огромной бабочки размером с голубя. Все шутили по поводу такого «галстука». Начался урок, Вячеслав Андреевич зашел в класс, мы стояли. Он осматривал всех — все ли пришли в галстуках, т. к. он обещал, что без галстука на уроке быть нельзя. Тут его взгляд упал на одноклассника с бабочкой в горошек. Все стали смеяться. Вячеслав Андреевич быстро посмотрел вокруг, и очевидно ему показалось, что этот одноклассник над ним пошутил. Вячеслав Андреевич подошел к нему, нежно поднял сзади за подмышки и понес к двери. Мы вспомнили, что кто-то говорил, что Вячеслав Андреевич занимается штангой. Было весело. Одноклассник, пока его несли, воскликнул: «Это мне бабушка галстук сделала!» Вячеслав Андреевич поставил его на пол. «Папа и мама уехали в командировку», — добавил одноклассник. Вячеслав Андреевич и все увидели, что одноклассник говорит искренне, и разрешил ему идти за его парту. Одноклассник с

выражением «справедливость восторжествовала» удовлетворенно сел. В целом, как-то все было по-доброму, может, потому мне и запомнилось.

Александр Ведрашко,

*благодарный ученик Вячеслава Андреевича,
доктор философии по экономике*



Вячеслав Андреевич начал учебный год с обзора материала, который мы проходили в предыдущие годы и должны были уже знать. Обзор был доскональным, но занял не так много времени — определения и теоремы были продиктованы и записаны пословно, иногда без доказательств. Только позднее, во время учебы в МФТИ и в Гарварде, я осознал насколько мудрым был такой подход — наш класс был собран из учеников различных школ, которые учились по различными программам и с разным уровнем подготовки. Обзор дал шанс наверстать упущенное тем, кому это было необходимо, и позволил повторить и углубить понимание материала тем, кто его уже усвоил. В результате уровень подготовки нашего класса вырос значительно и мы смогли осваивать новые темы в более высоком темпе. Как машины в гонке NASCAR, вместе мы смогли продвигаться быстрее, чем если бы мы это делали в одиночку.

«Думай голова — картуза куплю!» — эти слова Вячеслава Андреевича почему-то приходили мне в голову на протяжении многих лет после окончания школы, особенно поздно вечером при подготовке домашних заданий. Не знаю, помогали ли они моей голове думать или нет, но каждый раз я вспоминал Вячеслава Андреевича, его уникальные способности объяснить изначально непростые темы и найти красоту там, где многие видят лишь запутанные диаграммы и символы.

Сергей Джосюк,

*благодарный ученик Вячеслава Андреевича,
доктор философии по физике*



Учитель і учень познайомились, коли Тарас навчався у 5 класі. На той час В'ячеслав Андрійович займався олімпіадною математикою лише з учнями старших класів. Тарасу прийшлося довести, що він

має здібності і бажання займатись олімпіадною математикою в такому юному віці і гідним до праці із таким учителем — В. А. Ясінським. Тарас пройшов «випробування» і, як сказав В'ячеслав Андрійович: «Із нього вийдуть люди!». Заняття математикою, співпраця учня і Учителя (так, саме співпраця) стала сенсом навчання та навіть життя молодого і ще недосвідченого юнака. Як виявилось, займались не тільки математикою.

Спочатку ми, як батьки із заздрістю та ревностями реагували, коли Тарас звертався спочатку до В'ячеслава Андрійовича (а не до батьків) з своїми особистими питаннями, наївними і незрозумілими вже для нас, дорослих. Просив його поради, вони разом робили повний аналіз ситуації. Але це було тільки спочатку. Потім з часом Тарас почав дорослішати, змінюватись, цінувати науку, батьків, сім'ю, свій час. Все те, що за роки спілкування з Учителем він вбирав в свою ще несформовану свідомість, почало приносити свій результат. Так, було багато перемог, дипломів, грамот, та було усвідомлення, що це важливо, але не головне в житті людини. В'ячеслав Андрійович вчив: «Любіть і мрійте, працюйте і аналізуйте — тільки тоді прийде успіх!».

Результатом плідної співпраці став вступ до Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Тарас цим надзвичайно пишається.

Дружба і товаришування з учнями — невід'ємна риса В'ячеслава Андрійовича. Так і Тарас, по приїзду в Вінницю найперше телефонував В'ячеславу Андрійовичу розповісти як навчається, працює, як поживає родина. Цей невимуснений чоловічий діалог багато чого вартий!

Немає, вже не повернеш!.. Не вистачить слів висловити гіркоту втрати, загоїти душевну рану. По всьому-всьому світу його вдячні учні сумують і розуміють, що вже не повернеш того великого Учителя, яким був В'ячеслав Андрійович.

Леонід Матохнюк,

*батько Матохнюка Тараса — улюбленого учня Ясінського В. А.,
багаторазового переможця Всеукраїнських та Соросівських
олімпіад, лауреата Міжнародної олімпіади 2002 року.*



Задачі В. А. Ясінського

В цьому розділі ми спробували зібрати в одному місці якомога більше задач, автором яких є В'ячеслав Андрійович Ясінський. Ми розуміли, що зібрати абсолютно усі задачі неможливо. Працюючи над книгою, ми могли користуватись джерелами, в яких чітко відзначено автор задачі, матеріалами певних рукописів В'ячеслава Андрійовича. Очевидно, що є задачі, які В'ячеслав Андрійович пропонував для проведення багатьох олімпіад (зокрема, міських, обласних), турнірів, конкурсів, але які не потрапили до цієї книги, оскільки в наявних матеріалах не відзначено авторства задач.

Таким чином, у даному розділі представлено 500 задач В. А. Ясінського, які пропонувались на всеукраїнських, міжнародних олімпіадах з математики, на комплексній олімпіаді з математики, фізики, інформатики «Турнір чемпіонів», на олімпіаді з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, на відкритих олімпіадах Рішельєвського ліцею, на Соросівських олімпіадах, на олімпіадах школи №239 м. Санкт-Петербург, на сторінках журналів «Математика в школі», «Математика в школі», «У світі математики».

Кафедра алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету продовжує колекціонувати задачі В'ячеслава Андрійовича. Якщо читачам відомі його задачі, які не потрапили до цієї книги — прохання повідомити нам про це на адресу amnm.vspu@gmail.com.

Задачі IV етапу Всеукраїнської олімпіади з математики

1. Знайти останні чотири цифри числа $1997 \cdot 5^{1998}$ в його десятковому записі.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 1998 р.

2. На площині задані пряма l та дві точки A і B , які лежать по один бік від прямої l . За допомогою циркуля та лінійки побудуйте точку C так, щоб пряма l перетинала відрізки AC і BC відповідно в таких точках M і N , що відрізок BM — висота, а відрізок AN — медіана трикутника ABC .

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 1998 р.

3. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел a , b та c , що задовольняють рівність $abc = 1$, виконується нерівність:

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} \geq 3.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 1998 р.

4. На площині задано опуклий 2000-кутник. Доведіть, що на площині можна відмітити 1998 точок так, щоб кожен трикутник, вершини якого є вершинами даного 2000-кутника, містив всередині (але не на сторонах) рівно одну з відмічених точок.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 1998 р.

5. Знайти всі пари дійсних чисел $(x; y)$, які задовольняють рівність:

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 1998 р.

6. На стороні AC трикутника ABC довільно вибирається точка M . Нехай O — точка перетину перпендикулярів, опущених з середин відрізків AM і MC відповідно на прямі BC і AB . При якому положенні точки M довжина відрізка OM досягає найменшого значення?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 1998 р.

7. Нехай m — найменше з чотирьох чисел: 1 , x^9 , y^9 , z^7 , де x , y , z — невід'ємні числа. Довести, що: $m \leq xy^2z^3$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 1998 р.

8. На прямій задана скінченна множина відрізків, яка задовольняє таку умову: серед будь-яких 1998 відрізків цієї множини знайдуться два таких, що мають спільну точку (хоча б одну). Довести, що на цій прямій можна відмітити 1997 точок так, щоб будь-який відрізок нашої множини містив хоча б одну з цих точок.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 1998 р.

9. Барон Мюнхаузен стверджує, що довільну кількість гостей він може розселити по кімнатах свого будинку так, що в кожній кімнаті або всі гості будуть попарно знайомі, або всі попарно незнайомі. Чи правду каже барон? (Вважаємо, що в кожному кімнату можна поселити довільну кількість гостей, але кількість кімнат в будинку Мюнхаузена скінченна).

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 1998 р.

10. Довести, що для будь-яких чисел x, y, z з проміжку $(0; 1]$ виконується нерівність:

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{3}{x+y+z}.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 1998 р.

11. Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[0; 1]$ і набуває значень з цього відрізка. Відомо, що існує таке число λ з проміжку $(0; 1)$, для якого: $f(\lambda) \neq 0$ та $f(\lambda) \neq \lambda$ і також:

$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y)$$

для всіх x та y , що входять до області визначення цієї рівності.

а) Навести приклад такої функції.

б) Довести, що для будь-якого $x \in [0; 1]$:

$$\underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_{19} = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_{98}.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 1998 р.

12. Дві кулі різних радіусів дотикаються зовнішнім чином в точці P . Дані відрізки AB і CD такі, що одна з куль дотикається до них в точках A і C , друга — в точках B і D . Нехай M і N — це проекції середин відрізків AC і BD на пряму, що проходить через центри даних куль. Довести, що $PM = PN$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 1998 р.

13. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — це послідовність дійсних чисел така, що:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{n^2}{x_n} + \frac{x_n}{n^2} + 2, \quad n \geq 1.$$

Довести, що:

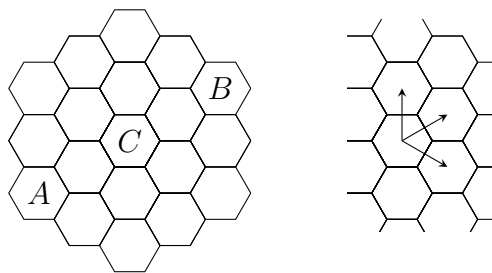
- а) $x_{n+1} \geq x_n$ для всіх $n \geq 4$;
 б) $[x_n] = n$ для всіх $n \geq 4$ ($[a]$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує a).

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 1998 р.

14. Чи існує 2000-цифрове число n , яке є квадратом натурального числа і в його десятковому записі принаймні 1999 п'ятірок?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 1999 р.

15. Розглянемо фігуру «Соняшник», яка складається з 19-ти клітинок, кожна з яких є правильним шестикутником. В цій фігурі відмітили три клітинки: A , B , C (див. перший рисунок). В клітинці A знаходиться фішка. За один хід вона може переміститися на одну клітинку в одному з трьох напрямів, які вказано на другому рисунку. Скількома різними шляхами фішка може потрапити із клітинки A до клітинки B , якщо їй забороняється бувати в клітинці C ?



IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 1999 р.

16. Нехай x та y — додатні числа, для яких виконується нерівність: $(x-1)(y-1) \geq 1$. Довести, що для сторін a , b , c довільного трикутника виконано нерівність:

$$a^2x + b^2y > c^2.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 1999 р.

17. Розв'язати рівняння:

$$[x] + \frac{1999}{[x]} = \{x\} + \frac{1999}{\{x\}}$$

(тут $\{x\} = x - [x]$, $[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x).

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 1999 р.

18. $P(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами. Послідовність цілих чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ задовольняє таким умовам: $x_1 = x_{2000} = 1999$, $x_{n+1} = P(x_n)$ для всіх натуральних n . Знайти значення виразу:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{1999}}{a_{2000}}.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 1999 р.

19. Розв'язати рівняння:

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x + \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 1.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 1999 р.

20. Знайти значення виразу:

$$[\pi] + \left[\frac{[2\pi]}{2} \right] + \left[\frac{[3\pi]}{3} \right] + \dots + \left[\frac{[1999\pi]}{1999} \right],$$

де $[a]$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує a .

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 1999 р.

21. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_6$ — числа з відрізка $[0; 1]$. Довести, що виконується така нерівність:

$$\begin{aligned} \frac{x_1^3}{x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \frac{x_2^3}{x_1^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \dots + \\ + \frac{x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + 5} \leq \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 1999 р.

22. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC , O — довільна точка всередині трикутника $A_1B_1C_1$. Позначимо через M і N основи перпендикулярів, опущених з точки O на прямі AA_1 та BC відповідно, P і Q — з точки O на прямі BB_1 та CA відповідно, R і S — з точки O на прямі CC_1 та AB відповідно. Довести, що прямі MN , PQ та RS перетинаються в одній точці.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 1999 р.

23. Про паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ відомо, що всі його грані — ромби, а плоскі кути при вершині A рівні α . На ребрах $A_1 B_1$, DC , BC і $A_1 D_1$ відмітили точки M , N , P і Q відповідно так, що $A_1 M = BP$ і $DN = A_1 Q$. Знайти кут між лініями перетину площини $(A_1 BD)$ з

площинами (AMN) і (APQ) .

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 1999 р.

24. Визначте, яку максимальну кількість трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, щоб кожне з них не містило однакових цифр та будь-які два з утворених чисел мали не більше однієї спільної цифри.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2000 р.

25. Знайдіть усі натуральні числа, які у 2000 разів більші від суми своїх цифр.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2000 р.

26. Знайдіть усі цілі числа n , для яких число $n^2 + 19n + 99$ є квадратом цілого числа.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2000 р.

27. Трикутник, утворений точками перетину продовжень медіан трикутника ABC з описаним навколо трикутника ABC колом, є рівностороннім. Доведіть, що трикутник ABC сам є рівностороннім.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2000 р.

28. Про дійсні числа α і β з проміжку $[0; \pi]$ відомо, що: $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = -1$. Доведіть, що: $1 \leq \sin \alpha + \sin \beta \leq \sqrt{3}$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2000 р.

29. На дошці записано n одиниць. Із записаними на дошці числами дозволяється проводити наступну дію: витерти будь-які два з них, нехай це a і b , і замість них записати число $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Цю операцію повторюють, поки на дошці не залишиться одне число. Доведіть, що це число буде не меншим за $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2000 р.

30. В деякий ненульовий момент часу в початку прямокутної системи координат Oxy — точці O — знаходиться вірус грипу. Через одну хвилину він розпадається на чотири таких же віруси, кожний з яких переміщується на одиницю довжини в системі координат: один — вище, один — нижче, один — лівіше, один — правіше. Таке перетворення відбувається через кожну хвилину з кожним вірусом. Якщо в деякий момент часу в одній точці опиняються два, або більше вірусів, то всі вони миттєво взаємознищуються. Розглянемо такий процес від початкового (нульового) моменту часу до моменту в 2000 хвилин включно.

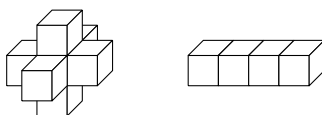
Скільки разів на протязі інтервалу часу від моменту 1 хвилина включно до моменту 2000 хвилин включно загальна кількість вірусів буде набувати свого мінімального значення на цьому інтервалі часу?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2000 р.

31. Паралелограм $ABCD$ і ромб $AB_1C_1D_1$ мають спільний кут A . Відомо, що $BD \parallel CC_1$. Нехай P — точка перетину прямих AC і B_1C_1 , а Q — точка перетину прямих AC_1 і CD . Доведіть, що кут AQP є прямим.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2000 р.

32. Дитячий конструктор складається з фігурок вигляду (ліва фігурка утворена з семи кубиків $1 \times 1 \times 1$, а права — з чотирьох кубиків $1 \times 1 \times 1$):



Чи можна за допомогою цих фігурок скласти куб, розмірами $11 \times 11 \times 11$, що не буде мати порожнин?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2000 р.

33. Чи існує функція f , що, визначена на множині всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$, приймає дійсні значення та задовольняє три наступні умови:

- 1) f диференційовна на $\mathbb{R}$;
- 2) $f'(2000) = 1$;
- 3) $(f(2000 + x))^3 = (f(2000 - x))^2 + x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2000 р.

34. Нехай AA_1 , BB_1 , CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC . Позначимо через A_2 , B_2 , C_2 точки дотику кола, вписаного в трикутник $A_1B_1C_1$, з сторонами B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 відповідно. Доведіть, що прямі AA_2 , BB_2 , CC_2 перетинаються в одній точці.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2000 р.

35. Чи існують натуральні числа m і n такі, що число $\frac{m^2+1}{n^2-1}$ — ціле?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2000 р.

36. Про тетраедр $ABCD$ відомо, що $AB = AC = AD = BC$, а суми плоских кутів при вершинах B і C дорівнюють по 150° . Знайдіть суми плоских кутів при вершинах A і D .

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2000 р.

37. Нехай a, b, c — невід’ємні дійсні числа такі, що $a + b + c = 3$. Доведіть, що:

$$2(a^3b + b^3c + c^3a) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a - 1).$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2000 р.

38. В деякий ненульовий момент часу в початку прямокутної системи координат Oxy — точці O — знаходиться вірус грипу. Через одну хвилину він розпадається на чотири таких же вірусів, кожний з яких переміщується на одиницю довжини в системі координат: один — вище, один — нижче, один — лівіше, один — правіше. Таке перетворення відбувається через кожну хвилину з кожним вірусом. Якщо в деякий момент часу в одній точці опиняються два, або більше вірусів, то всі вони миттєво взаємознищуються. Розглянемо такий процес від початкового (нульового) моменту часу до моменту в 2000 хвилин включно.

а) Скільки разів на протязі інтервалу часу від моменту 1 хвилини включно до моменту 2000 хвилин включно загальна кількість вірусів буде набувати свого мінімального значення на цьому інтервалі часу?

б) Скільки вірусів будуть існувати в момент часу 2000 хвилин (одразу після взаємознищення вірусів в цей момент часу)?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2000 р.

39. Про опуклий чотирикутник відомо, що величини його кутів дорівнюють цілому числу градусів, і величина одного з них дорівнює добутку величин трьох інших. Доведіть, що цей чотирикутник — паралелограм або рівнобедрена трапеція.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2001 р.

40. а) Чи існують такі натуральні числа m і n , що виконується рівність:

$$\text{НСД}(m + n; mn) - \text{НСД}(m; n) = 2000?$$

б) Чи існують такі натуральні числа m і n , що виконується рівність:

$$\text{НСД}(m + n; mn) - \text{НСД}(m; n) = 2001?$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2001 р.

41. Скількома різними способами з цифр від 1 до 9 можна утворити три трицифрових числа так, щоб сума найбільшого і найменшого з цих чисел була найбільшою можливою? (Кожну цифру можна

використовувати тільки один раз.)

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2001 р.

42. Нехай $S(n)$ позначає суму цифр десяткового запису натурального числа n . Чи існують такі натуральні k, l, m , що $\frac{k+l+m}{3}$ — ціле, причому: $S(k+l) < 150$, $S(l+m) < 150$, $S(m+k) < 150$, $S(\frac{k+l+m}{3}) > 2001$?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2001 р.

43. Чи існує функція f , що визначена на множині всіх пар дійсних чисел і задовольняє умови:

- 1) f набуває всіх дійсних значень;
- 2) для будь-яких дійсних x та y : $f(x, y) = -f(y, x)$;
- 3) для будь-яких дійсних x, y та z : $f(x, f(y, z)) = 2001f(f(x, y), z)$?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2001 р.

44. Серед усіх натуральних чисел n , які задовольняють рівність:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = 2001,$$

знайдіть найбільше і найменше.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2001 р.

45. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що:

$$f(x+y) = f(x)f(2001-y) + f(y)f(2001-x)$$

для всіх дійсних x, y і $f(0) = \frac{1}{2}$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2001 р.

46. Натуральні числа m і n такі, що сума дробів $\frac{m^n-1}{n-1}$ і $\frac{n^m-1}{m-1}$ є цілим числом. Доведіть, що кожен із цих дробів є цілим числом.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2001 р.

47. У кожній з трьох країн живуть по n математиків. Відомо, що кожен із них листується не менше, ніж з $n+1$ іноземним математиком. Доведіть, що існують три математики, які попарно листуються між собою.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2001 р.

48. Про натуральні числа a і n відомо, що $a^2 + 1$ ділиться без остачі на n . Доведіть, що існує таке натуральне число b , що $b^2 + 1$ ділиться на $n(n^2 + 1)$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2001 р.

49. Про тетраедр $ABCD$ відомо, що $\angle BAC + \angle BAD = \angle ABC + \angle ABD = 90^\circ$. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC , M — середина ребра CD . Доведіть, що прямі AB і MO взаємно перпендикулярні.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2001 р.

50. Про залізницю Тернополі відомо, що з кожної її станції до будь-якої іншої можна дістатися, проїхавши не більше, ніж через дві інші станції. Крім того, з кожної станції можна виїхати не більше, ніж по трьох різних коліях. Яка найбільша кількість залізничних станцій може бути в Тернополі, якщо відомо, що ця кількість непарна?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2001 р.

51. Нехай a, b, c та α, β, γ — додатні дійсні числа такі, що $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Доведіть, що:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + 2\sqrt{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(ab + bc + ca)} \leq a + b + c.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2001 р.

52. Знайдіть усі пари натуральних чисел m і n , для яких виконується рівність:

$$2002^n - 2001^n = m^{2002}.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2002 р.

53. На сторонах трикутника ABC (кут B — тупий) зовні його побудовано рівносторонні трикутники ABC_1 , AB_1C , A_1BC . Нехай B_2 і C_2 — такі точки, що ABC_1B_2 і ACB_1C_2 — ромби. Доведіть, що пряма AA_1 ділить відрізок B_2C_2 навпіл.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2002 р.

54. Дано нескінченний в усі боки аркуш паперу в клітинку. Чи можна в кожній клітинці записати ціле число так, щоб:

1) були записані всі цілі числа, причому кожне з них — тільки один раз;

2) в кожному стовпчику існувало число, менше за всі інші числа цього стовпчика, а в кожному рядку існувало число, більше за всі інші числа цього рядка.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2002 р.

55. Знайдіть всі такі натуральні числа $k < 2002$, що число $5n^7 + 7n^5 + kn$ ділиться на 35 при всіх натуральних n .

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2002 р.

56. Множину чисел 1, 2, 3, ..., 2001, 2002 розбито на дві групи. До першої групи віднесли всі числа з непарною сумою цифр, а до другої — з парною. Знайти різницю між сумою чисел першої групи і сумою чисел другої групи.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2002 р.

57. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt{3 + 2000x} + 9 < 4x^2 + \sqrt{2002x}.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2002 р.

58. Знайти всі натуральні числа n такі, що числа n , $[n\sqrt{2}]$, $[[n\sqrt{2}]\sqrt{2}]$ утворюють арифметичну прогресію. (Тут $[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x).

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2002 р.

59. Нехай $p > 2$ — просте число, $k > 1$ — кількість фарб, $k - 1$ та p взаємно прості. Довести, що кількість способів фарбування сторін правильного p -кутника так, щоб сусідні сторони були пофарбовані в різні кольори (многокутник повертати не можна), ділиться на $(k - 1)p$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2002 р.

60. Основою чотирикутної піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$. Відомо, що $\angle SBA + \angle SBC = 180^\circ$. На ребрі SC відмітили точку M так, що $SM = 2MC$. Довести, що площина, яка проходить через пряму DM і паралельна до прямої AC , перетинає висоту піраміди в її середині.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2002 р.

61. Нехай $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$, $(b_1, b_2, \dots, b_{10})$, $(c_1, c_2, \dots, c_{10})$, $(d_1, d_2, \dots, d_{10})$ — чотири перестановки чисел 1, 2, ..., 10.

а) Чи може статися так, що:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{10}b_{10} = 2(c_1d_1 + c_2d_2 + \dots + c_{10}d_{10})?$$

б) Чи може статися так, що:

$$45(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{10}b_{10}) = 76(c_1d_1 + c_2d_2 + \dots + c_{10}d_{10})?$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2002 р.

62. На сторонах AB , BC , AC гострокутного трикутника ABC вибрали точки C_1 , A_1 , B_1 відповідно так, що $A_1B = A_1C_1$ і $A_1C = A_1B_1$. Нехай I_1 — центр кола, вписаного в трикутник $A_1B_1C_1$, а H — точка перетину висот трикутника ABC . Доведіть, що точки B_1 , C_1 , I_1 і H лежать на одному колі.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2002 р.

63. В опуклий п'ятикутник $ABCDE$ вписано коло, яке дотикається до всіх його сторін. Відомо, що $\angle BAE = \angle DCB = \angle AED = 90^\circ$. Знайдіть величину кута ACE .

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2003 р.

64. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a , b , c виконується нерівність:

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ca} \geq 3.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2003 р.

65. Знайдіть усі такі пари числових функцій f і g , визначених на множині всіх дійсних чисел, що для будь-яких дійсних чисел x та y виконується рівність:

$$f(x) + f(y) + g(x) - g(y) = x^3 + \sqrt[3]{y}.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2003 р.

66. Дано гострокутний трикутник ABC , у якому $\angle C = 60^\circ$ і нехай точка I — центр вписаного в нього кола. На стороні AB обрано такі точки M і N , що $AM = MN = NB$, а на сторонах AC і BC обрано такі точки P і Q відповідно, що чотирикутник $CPIQ$ — паралелограм. Доведіть, що якщо $\angle MPI = \angle NQI$, то трикутник ABC — рівносторонній.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2003 р.

67. Нехай точка O — центр сфери, описаної навколо трикутної піраміди $SABC$. Відомо, що $SA + SB = CA + CB$, $SB + SC = AB + AC$, $SC + SA = BC + BA$. Нехай точки A_1 , B_1 , C_1 — середини ребер BC , CA , AB відповідно. Обчисліть радіус сфери, описаної навколо трикутної піраміди $OA_1B_1C_1$, якщо $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2003 р.

68. Знайдіть усі такі числові функції f , визначені на множині всіх дійсних чисел, що для будь-яких дійсних чисел x та y виконується

рівність:

$$f(xf(x) + f(y)) = x^2 + y.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2003 р.

69. Цілі числа a, b, c, d задовольняють рівності:

$$a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = 2004.$$

Доведіть, що число $m = 2(a+b)(c+d)(ac+bd-2004)$ є квадратом цілого числа.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2004 р.

70. Дано два числа: 79^{26} і 244^{21} . Визначте, яке з них є більшим.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2004 р.

71. Нехай x, y, z — додатні числа і $x + y + z = 1$. Доведіть, що виконується нерівність:

$$\sqrt{xy+z} + \sqrt{yz+x} + \sqrt{zx+y} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2004 р.

72. Квадратне поле розміром $n \times n$, яке розділено на квадратні земельні ділянки, розміром 1×1 , приватизують n дачників. Спочатку кожен дачник отримує по одній ділянці так, що в кожному рядку ділянок і в кожному стовпчику ділянок цього поля приватизовано рівно одну ділянку. Кожного наступного дня кожен дачник приватизує нову ділянку, яка має спільну сторону з ділянкою, котра була ним приватизована напередодні. Приватизація називається успішною, якщо протягом n днів усе поле буде приватизовано. Доведіть, що при $n = k^4$, де k — непарне натуральне число, можна так здійснити початковий розподіл ділянок, що подальша приватизація може бути здійснена успішно.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2004 р.

73. Знайдіть усі такі функції $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, що одночасно задовольняють такі три умови:

- 1) $f(1) = 1$;
- 2) $f(n+2) + (n^2 + 4n + 3)f(n) = (2n+5)f(n+1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;
- 3) $f(m)$ ділиться без остачі на $f(n)$ для будь-яких натуральних $m > n$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2004 р.

74. Нехай a, b, c — такі дійсні числа, що правильна рівність: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Доведіть, що: $a + b + c \leq 2abc + \sqrt{2}$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2004 р.

75. На дошці зображено правильний 2004-кутник, у якому проведено всі діагоналі. Деякі його сторони та діагоналі витерли так, щоб з кожної вершини виходило щонайбільше 5 відрізків. Доведіть, що вершини даного 2004-кутника можна пофарбувати в два кольори так, щоб принаймні $\frac{3}{5}$ не витертих відрізків мали різнокольорові кінці.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2004 р.

76. Дано трикутну піраміду $SABC$, бічне ребро SA якої перпендикулярне до основи ABC . Дві різні сфери σ_1 та σ_2 проходять через точки A, B, C так, що кожна з них дотикається зсередини до сфери σ , центр якої знаходиться в точці S . Знайдіть радіус R сфери σ , якщо радіуси сфер σ_1 і σ_2 дорівнюють r_1 і r_2 відповідно.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2004 р.

77. Доведіть, що для всіх цілих $n > 1$ число $\frac{3^n - 2^n}{n}$ не є цілим.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2004 р.

78. На площині дано 2004 точки, які є вершинами опуклого 2004-кутника. Жодні чотири з них не лежать на одному колі. Будь-який трикутник з вершинами в цих точках назвемо «товстим», якщо його описане коло містить усередині всі інші 2001 даних точок, а також — «худим», якщо його описане коло не містить жодної з інших 2001 даних точок. Доведіть, що «товстих» та «худих» трикутників однакова кількість.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2004 р.

79. Нехай a, b, c — такі додатні дійсні числа, що $abc \geq 1$. Доведіть, що:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ca.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2004 р.

80. Дано опуклий 2004-кутник $A_1A_2 \dots A_{2004}$. Кожна його сторона і кожна діагональ фарбується в один із 2003 кольорів. Чи можна це зробити так, щоб відрізків кожного кольору було рівно 1002 і для будь-яких двох кольорів, вийшовши з довільної вершини, по відрізках цих кольорів можна було б обійти всі вершини, побувавши в кожній тільки один раз?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2004 р.

81. Нехай AD — медіана трикутника ABC , причому $\angle ADB = 45^\circ$ і $\angle ACB = 30^\circ$. Знайдіть величину кута BAD (у градусах).

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2005 р.

82. Для яких дійсних чисел $x > 1$ існує трикутник з довжинами сторін $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ та $x^4 - 1$?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2005 р.

83. Чи існують такі цілі числа a, b, c, d, t, x, y, z , що кожен із шести виразів $|ay - bx|$, $|az - cx|$, $|at - dx|$, $|bz - cy|$, $|bt - dy|$, $|ct - dz|$ набуває значення 1 або 2005?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2005 р.

84. Знайдіть усі пари натуральних чисел m і n , які задовольняють рівність:

$$\sqrt{m} + \frac{2005}{\sqrt{n}} = 2006.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2005 р.

85. У нумізмата Миколки є 241 монета загальною вартістю 360 тугриків (вартість кожної монети виражається цілим додатним числом тугриків). Чи можна з упевненістю стверджувати, що всі ці монети можна розділити на три купки з однаковими сумами тугриків у купках?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2005 р.

86. Чи можна число 1 подати, як суму 2005 доданків, кожен з яких має вигляд $\frac{1}{3n-1}$, де n — деяке натуральне число?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2005 р.

87. Доведіть, що для всіх натуральних чисел n виконується нерівність:

$$\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} < \frac{1}{2},$$

де $1! = 1$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$, при $k \geq 2$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2005 р.

88. Усередині паралелограма $ABCD$ відмітили такі дві різні точки P і Q , що $\angle ABP = \angle ADP$ і $\angle CBQ = \angle CDQ$, причому ці точки не лежать на діагоналі AC . Доведіть, що $\angle PAQ = \angle PCQ$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2005 р.

89. На серединному перпендикулярі до сторони AC гострокутного трикутника ABC відмітили таку точку M , що $\angle BAC = \angle MCB$ і $\angle ABC + \angle MBC = 180^\circ$, причому точка M лежить по один бік з вершиною B

відносно прямої AC . Знайдіть величину кута BAC (у градусах).

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2005 р.

90. На площині відмітили 2005 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, і через усі пари відмічених точок провели прямі. Доведіть, що відмічені точки можна розфарбувати в два кольори так, що для довільних двох однокольорових точок кількість проведених прямих, які розділяють ці дві точки, є парною. (Кажуть, що пряма розділяє дві точки площини, якщо жодна з цих точок їй не належить і ці точки лежать у різних півплощинах відносно неї).

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2005 р.

91. Навколо гострокутного трикутника ABC описали коло ω з центром у точці O , а потім навколо трикутника AOC описали коло ω_1 і провели в ньому діаметр OQ . На прямих AQ і AC відмітили точки M і N відповідно так, що отриманий чотирикутник $AMBN$ є паралелограмом. Доведіть, що точка перетину прямих MN і BQ лежить на колі ω_1 .

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2005 р.

92. Знайдіть усі такі натуральні числа n , що $\cos(\pi\sqrt{n^2 + n}) \geq 0$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2005 р.

93. Доведіть, що для кожного натурального числа $n \geq 2$ існує такий набір A_n з n попарно різних натуральних чисел, що для будь-яких двох нерівних чисел $i, j \in A_n$ сума їх квадратів $i^2 + j^2$ ділиться без остачі на різницю $i - j$ цих чисел.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2005 р.

94. У просторі відмітили 2005 точок, жодні чотири з яких не лежать в одній площині, і через усі трійки відмічених точок провели площини. Доведіть, що відмічені точки можна розфарбувати в два кольори так, що для довільних двох однокольорових точок кількість проведених площин, які розділяють ці дві точки, є непарною. (Кажуть, що площина розділяє дві точки простору, якщо жодна з цих точок їй не належить і ці точки лежать у різних півпросторах відносно неї).

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2005 р.

95. Дано трапецію $ABCD$ з основами BC і AD . На бічних сторонах AB і CD вибрали точки M і N відповідно так, що відрізок MN паралельний основам трапеції і проходить через точку перетину її діагоналей. Нехай відрізок DP — висота трикутника DMC , а відрізок

AQ — висота трикутника ABN . Доведіть, що $AP = DQ$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2006 р.

96. Таблицю, розміром 2006×2006 довільно заповнено натуральними числами від 1 до 2006^2 : у кожній клітинці записується одне число і при цьому будь-яке з натуральних чисел від 1 до 2006^2 використовується рівно один раз. За один крок дозволяється або обрати один рядок і впорядкувати його за зростанням зліва направо (якщо він не є впорядкованим), або — обрати один стовпчик і впорядкувати його за зростанням зверху вниз (якщо він не є впорядкованим). Таблицю називатимемо «впорядкованою», якщо всі її рядки впорядковані за зростанням зліва направо й усі її стовпчики впорядковані за зростанням зверху вниз (якщо таблиця стає «впорядкованою», то процес припиняється).

а) Чи може статися так, що після виконання декількох таких кроків ми знов отримаємо вихідну таблицю?

б) Доведіть, що для перетворення будь-якої таблиці, що задовольняє умову задачі, на «впорядковану» завжди вистачить 4012 кроків.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2006 р.

97. Дано гострокутний трикутник ABC . Нехай D — відмінна від вершин точка сторони BC , точки P і Q — центри описаних кіл трикутників ABD і ACD відповідно. Розглянемо всілякі трикутники APQ , одержані для всіх таких точок D . Доведіть, що кола, описані навколо всіх зазначених трикутників, мають спільну точку, відмінну від точки A .

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2006 р.

98. Дано трапецію $MPRQ$ з основами PM і RQ ($RQ < PM$). На стороні PM відмічено точку S , відмінну від вершин. Нехай O — точка перетину бісектрис кутів MSQ і MPQ , I — центр вписаного кола трикутника PQR . Відомо, що прямі QR і OI паралельні. Доведіть, що $SR = OI$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2006 р.

99. Нехай A і B — дві різні точки перетину двох кіл ω_1 і ω_2 , C — точка перетину дотичної до кола ω_1 , проведеної через точку A , з дотичною до кола ω_2 , проведеною через точку B . Пряма AC перетинає коло ω_2 в точці T , відмінній від A . На колі ω_1 довільно обирається відмінна від A і B точка X так, щоб пряма XA перетинала коло ω_2 в точці Y , відмінній від A . Нехай пряма YB перетинає XC в точці Z . Доведіть, що прямі TZ

і XU паралельні.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2006 р.

100. У просторі дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Усередині цього куба відмітили довільно точку M . На променях $MA, MB, MC, MD, MA_1, MB_1, MC_1$ і MD_1 відмітили відмінні від M точки $A', B', C', D', A'_1, B'_1, C'_1$ і D'_1 відповідно так, що $A'B'C'D' A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ є паралелепіпедом (призмою, усі грані котрої є паралелограмами). Доведіть, що цей паралелепіпед $A'B'C'D' A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ — куб.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2006 р.

101. Рота, якою командує капітан Петренко складається з n , $n \geq 3$, солдатів, серед яких немає жодних двох однакового зросту. Капітан вишикував їх у шеренгу в деякому порядку (не обов'язково за зростом). «Хвилею» в цій шерензі називатимемо таку її підпоследовність, солдати якої не обов'язково стоять поруч, але перший її солдат вищий за її другого солдата, її другий солдат нижчий за її третього, її третій солдат вищий за її четвертого, її четвертий солдат нижчий за її п'ятого і т.д. Наприклад, якщо $n = 9$, солдати пронумеровані за збільшенням зросту, і капітан їх вишикував у таку шеренгу: 9,3,5,7,1,2,6,4,8, то найдовшою «хвилею» цієї шеренги є, наприклад, така: 9,3,7,1,6,4,8. А якщо капітан їх вишикує за зростом так: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, — то найдовшою «хвилею» такої шеренги буде лише один солдат (будь-який), бо у «хвилі» другий солдат має бути нижчим за першого. Для кожного n визначте, яких шеренг більше: тих, у яких найдовша «хвиля» складається з парної кількості солдатів, чи тих, у яких найдовша «хвиля» складається з непарної кількості солдатів?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2006 р.

102. При яких натуральних n значення кожного з виразів $n^2 - 10n + 23$, $n^2 - 9n + 31$ і $n^2 - 12n + 46$ є простим числом?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2010 р.

103. Нехай a і b — такі натуральні числа, що:

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] = a^2 + b^2,$$

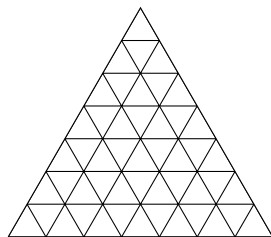
де через (a, b) і $[a, b]$ позначено відповідно найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел a , b . Знайдіть $(2010^a - 1, 2010^b - 1)$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2010 р.

104. На сторонах XY , YZ та ZX трикутника XYZ позначили відповідно точки C , E та A . На відрізках AX , CY та EZ відмітили відповідно точки B , D та F таким чином, що $BC \parallel AD$, $DE \parallel CF$, $AF \parallel BE$. Чи може статися так, що прямі XF , YB і ZD перетнуться в одній точці?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2011 р.

105. Правильний трикутник зі стороною 7 поділено на 49 маленьких правильних одиничних трикутничків так, як показано на рисунку. Із нього вирізають уздовж ліній сітки паралелограми, одна сторона яких дорівнює 1, а друга — 2. Яку найбільшу кількість таких паралелограмів можна вирізати?



IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10,11 клас, 2011 р.

106. Розв'яжіть рівняння:

$$\cos \pi x = \left[\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2} \right] - \frac{1}{2} \right].$$

(Тут через $[a]$ позначено найбільше ціле число, яке не перевищує a .)

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2011 р.

107. Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC . На бічній стороні CD довільно відмітили точку F , E — точка перетину прямих AF і BD . На бічній стороні AB відмітили точку G так, що $EG \parallel AD$. Позначимо через H точку перетину прямих CG і BD , через I — точку перетину прямих FH і AB . Доведіть, що прямі CI , FG і AD перетинаються в одній точці.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2011 р.

108. Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB , BC і CA в точках K , N і M відповідно, причому відомо, що $\angle MKC = \angle MNA$. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2012 р.

109. Знайдіть усі такі пари додатних раціональних чисел x , y , що обидва числа $x + \frac{1}{y}$ та $y + \frac{1}{x}$ є натуральними. Відповідь обґрунтуйте.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2012 р.

110. Нехай точка I — центр вписаного в трикутник ABC кола. На стороні AB обрано таку відмінну від вершин точку M , що $BM < BC$, причому описане коло навколо трикутника AMI перетинає сторону AC в

точці N , яка не співпадає з точками A і C . Доведіть, що $BM + CN = BC$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2012 р.

111. Дано трикутник ABC . Нехай I_A — центр кола, яке дотикається до сторони BC і до продовжень сторін AB і AC за точки B і C відповідно. Доведіть, що точки B , C та центри описаних кіл навколо трикутників ABI_A і ACI_A лежать на одному колі.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2012 р.

112. Нехай a і b такі натуральні числа, що число $\frac{a^4-1}{b+1} + \frac{b^4-1}{a+1}$ є цілим. Доведіть, що $a^{2010}b^{2012} - 1$ ділиться без остачі на $a + 1$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2012 р.

113. Знайдіть усі, визначені на всій числовій прямій, функції f , які набувають дійсних значень і такі, що для будь-яких дійсних x , y , z виконується нерівність:

$$f(xy) + f(xz) \geq f(x)f(yz) + 1.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2012 р.

114. Нехай $n \geq 3$ — задане натуральне число. Послідовність із $2n$ чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ будемо називати «вдалою», якщо виконуються такі три умови:

- 1) усі числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ є попарно різними елементами множини $\{1, 2, \dots, n\}$;
- 2) $a_k = a_{n+k}$ для всіх $k = 1, 2, \dots, n$;
- 3) існують такі $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ із множини $\{1, 2, \dots, 2n\}$, що $a_{i_k} = k$ для всіх $k = 1, 2, \dots, n$.

Наприклад, для $n = 5$ послідовність $\underline{1}, 3, 4, \underline{2}, 5, 1, \underline{3}, \underline{4}, 2, \underline{5}$ є «вдалою», а послідовність $2, 1, 3, 5, 4, 2, 1, 3, 5, 4$ — ні. Для всіх $n \geq 3$ знайдіть кількість «вдалих» послідовностей.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10,11 клас, 2012 р.

115. Про додатні числа a і b відомо, що: $a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 5$. Доведіть, що справедлива нерівність: $3\sqrt{a+b} \geq a + b + 2$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2012 р.

116. Нехай $SABC$ — така трикутна піраміда, що для точки M перетину медіан її грані ABC правильні нерівності: $MA > 1$, $MB > 1$ і $MC > 1$. Доведіть, що: $SA + SB + SC > 3$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2012 р.

117. Нехай H — точка перетину висот гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC , M — середина сторони AB , N — середина сторони AC . Позначимо через P і Q відповідно точки перетину променів MH і NH з описаним колом трикутника ABC . Доведіть, що прямі BQ , AN і CP перетинаються в одній точці або паралельні.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2012 р.

118. Нехай M — середина бічної сторони AB трапеції $ABCD$, O — точка перетину діагоналей цієї трапеції, причому $AO = BO$. На півпрямій OM позначили таку точку P , що $\angle PAC = 90^\circ$. Доведіть, що $\angle AMD = \angle APC$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2013 р.

119. Знайдіть усі такі цілі n , для яких $n + 3$ та $n^2 + 3n + 3$ одночасно будуть кубами цілих чисел.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2013 р.

120. Яку найбільшу кількість триклітинкових прямокутників (у будь-якій орієнтації) можна зафарбувати на клітчастій дошці розміру 20×13 так, щоб жодні два зафарбовані прямокутники не мали спільних точок?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8,9 клас, 2013 р.

121. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел m і n , для яких $\frac{(m+3n)^2}{m^2+n^2}$ є квадратом натурального числа.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2013 р.

122. Нехай точка M — середина сторони BC гострокутного трикутника ABC , в якому $AB \neq AC$, O — центр описаного кола цього трикутника. Проведемо з точки M перпендикуляри MP і MQ до сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що пряма, яка проходить через середину відрізка PQ і точку M , є паралельною прямій AO .

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2013 р.

123. Нехай $m \geq 35$ — задане натуральне число. Відомо, що в суді племені Мумбо-Юмбо працює m суддів. Для прискореного розгляду справ Верховний шаман племені вирішив утворити суддівські трійки так, щоб кожні дві трійки мали хоча б одного спільного суддю. Яку найбільшу кількість суддівських трійок може утворити Верховний шаман?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2013 р.

124. Нехай a, b і c — дійсні числа з проміжку $(0; 1]$. Доведіть, що має місце нерівність $a + b + c + |a - b| + |b - c| + |c - a| \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9,11 клас, 2013 р.

125. Навколо гострокутного трикутника ABC , у якому $AB < BC < AC$, описано коло ω з центром O . Позначимо через I центр вписаного кола даного трикутника, а через M — середину сторони BC . Нехай точка Q симетрична точці I відносно M , півпряма OM перетинає коло ω в точці D , а півпряма QD вдруге перетинає коло ω в точці T . Доведіть, що $\angle ACT = \angle DOI$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2013 р.

126. Для дійсних чисел x, y, z і t виконуються рівності:

$$\{x + y + z\} = \{y + z + t\} = \{z + t + x\} = \{t + x + y\} = \frac{1}{4}.$$

Знайдіть усі можливі значення виразу $\{x + y + z + t\}$ (тут $\{a\} = a - [a]$, а $[a]$ — ціла частина числа a , тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a).

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2013 р.

127. Нехай M — середина сторони BC трикутника ABC . На його сторонах AB і AC позначили відмінні від вершин довільні точки E і F відповідно. Нехай K — точка перетину прямих BF і CE , L — така точка, що $CL \parallel AB$ і $BL \parallel CE$, а N — точка перетину прямих AM і CL . Доведіть, що $KN \parallel FL$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10,11 клас, 2013 р.

128. Відомо, що для натуральних чисел a, b, c, d і n виконуються нерівності $a + c < n$ і $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$. Доведіть, що $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1 - \frac{1}{n^3}$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2013 р.

129. На столі лежать 100 карток, які пронумеровані натуральними числами від 1 до 100. Андрійко й Миколка вибрали собі однакову кількість карток так, що якщо картка з номером n є в Андрійка, то в Миколки є картка з номером $2n + 2$. Яка максимальна кількість карток могла бути в обох хлопчиків?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2013 р.

130. Знайдіть усі пари простих чисел p і q , які задовольняють рівність $3p^q - 2q^{p-1} = 19$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2013 р.

131. Чи можна в просторі відмітити 24 точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій, та провести рівно 2013 різних площин так, щоб кожна містила не менше трьох відмічених точок і будь-яка трійка відмічених точок належала хоча б одній з цих площин?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2013 р.

132. Нехай точка M — середина бісектриси AD гострокутного трикутника ABC . Коло з діаметром AC перетинає відрізок BM у точці E , а коло з діаметром AB перетинає відрізок CM у точці F . Доведіть, що точки B , E , F і C лежать на одному колі.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 10 клас, 2013 р.

133. Знайдіть усі натуральні числа n , для кожного з яких існують такі натуральні числа p і q , що $(n^2 + 2)^p = (2n - 1)^q$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2013 р.

134. Нехай O — центр описаного кола навколо гострокутного трикутника ABC . На відрізках OB і OC вибрали точки E і F відповідно так, що $BE = OF$. Позначимо через M і N середини дуг AOE і AOF описаних кіл навколо трикутників AOE і AOF відповідно. Доведіть, що $\angle ENO + \angle FMO = 2\angle BAC$.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2013 р.

135. Знайдіть усі такі трійки простих чисел (p, q, r) , що задовольняють рівність:

$$\frac{q}{p-1} + \frac{r}{p+1} = \frac{q+r+1}{p}.$$

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 8 клас, 2015 р.

136. Знайдіть усі прості числа $p < q < r$ такі, що числа $A = (r - p)(r - q)(q - p) + 1$ і $B = 3p + 5q$ дорівнюють одному і тому ж простому числу.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 9 клас, 2015 р.

137. а) Чи існують 2015 натуральних чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ такі, що будь-які два з них є взаємно простими, а число $a_1 a_2 \dots a_{2015} - 1$ є добутком двох послідовних непарних чисел?

б) Чи існують 2015 натуральних чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ такі, що будь-які два з них є взаємно простими, а число $a_1 a_2 \dots a_{2015} - 1$ є добутком двох послідовних парних чисел?

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 11 клас, 2015 р.

Задачі Міжнародних математичних олімпіад

138. Дано чотирикутник $ABCD$ з паралельними сторонами BC і AD . Точка M — середина CD , P — середина MA , Q — середина MB . Прямі DP і CQ перетинаються в точці N . Доведіть, що точка N розташована за межами чотирикутника $ABCD$.

ShortList IMO, 1994 p.

139. Дано гострокутний трикутник ABC . Точки A_1 і A_2 взято на стороні BC (причому A_2 між A_1 і C), B_1 і B_2 на стороні AC (B_2 між B_1 і A), C_1 і C_2 на стороні AB (C_2 між C_1 і B) так, що

$$\angle AA_1A_2 = \angle AA_2A_1 = \angle BB_1B_2 = \angle BB_2B_1 = \angle CC_1C_2 = \angle CC_2C_1.$$

Прямі AA_1 , BB_1 і CC_1 утворюють трикутник, а прямі AA_2 , BB_2 і CC_2 утворюють інший трикутник. Довести, що усі шість вершин цих двох трикутників лежать на одному колі.

ShortList IMO, 1995 p.

140. На площині дано точку O і багатокутник $\mathcal{F}$ (не обов'язково опуклий). Нехай P позначає периметр $\mathcal{F}$, D — суму відстаней від точки O до вершин $\mathcal{F}$, H — суму відстаней від точки O до прямих, що містять сторони $\mathcal{F}$. Доведіть, що

$$D^2 - H^2 \geq \frac{P^2}{4}.$$

ShortList IMO, 1996 p.

141. Нехай A_1 — центр квадрата, вписаного в гострокутний трикутник ABC , дві вершини якого лежать на стороні BC . Тоді ще одна вершина квадрата лежить на стороні AB і ще одна — на стороні AC . Точки B_1 , C_1 визначені в подібний спосіб для вписаних квадратів з двома вершинами на сторонах AC і AB відповідно. Довести, що прямі AA_1 , BB_1 , CC_1 перетинаються в одній точці.

ShortList IMO, 2001 p.

142. Нехай $ABCD$ — паралелограм. Рухома пряма l , яка проходить через точку A , перетинає промені BC і DC в точках X та Y відповідно. Нехай K і L — центри зовнівписаних кіл трикутників ABX і ADY , які дотикають сторін BX та DY відповідно. Довести, що величина кута KCL не залежить від вибору прямої l .

ShortList IMO, 2005 p.

143. Нехай $ABCD$ — трапеція з основами $AB > CD$. Точки K і L лежать на прямих AB і CD відповідно так, що $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Припустимо, що існують точки P і Q на відрізку KL такі, що $\angle APB = \angle BCD$ і $\angle CQD = \angle ABC$. Довести, що точки P , Q , B і C лежать на одному колі.

ShortList IMO, 2006 p.

144. На площині дано опуклий n -кутник. Для кожних трьох вершин цього n -кутника розглянемо трикутник, який ними визначається. Назвемо такий трикутник *хорошим*, якщо всі його сторони мають одиничну довжину. Довести, що існує всього не більше ніж $\frac{2n}{3}$ хороших трикутників.

ShortList IMO, 2007 p.

145. Нехай I — центр кола, вписаного в трикутник ABC . Позначимо через K , L , M точки, в яких це коло дотикається до сторін BC , CA , AB відповідно. Пряма, що проходить через точку B паралельно прямій MK , перетинає прямі LM і LK у точках R і S відповідно. Доведіть, що кут RIS — гострий.

Міжнародна математична олімпіада, 1998 p.

146. На площині розташовані кола $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ радіуса 1 кожне, з центрами $O_1, O_2, \dots, O_n$ відповідно, $n \geq 3$. Відомо, що будь-яка пряма площини має спільні точки не більше, ніж з двома з цих кіл. Доведіть, що:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Міжнародна математична олімпіада, 2002 p.

Задачі олімпіади з геометрії імені

І. Ф. Шаригіна

147. На площині задано n точок, які є вершинами опуклого n -кутника, $n > 3$. Відомо, що існує рівно k рівносторонніх трикутників зі стороною 1, вершинами яких є задані точки.

а) Доведіть, що $k < \frac{2}{3}n$.

б) Наведіть приклад конфігурації, для якої $k > 0,666n$.

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 2009 p.

148. На прямій лежать точки X , Y , Z (саме в такому порядку). Трикутники XAB , YBC , ZCD — правильні, причому вершини першого та третього орієнтовані проти часової стрілки, а другого за часовою

стрілкою. Доведіть, що прямі AC , BD та XY перетинаються в одній точці.

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 9 клас, 2010 р.

149. Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло з центром O . Точки C' і D' діаметрально протилежні точкам C і D відповідно. Дотичні до кола в точках C' і D' перетинають пряму AB в точках E та F (A лежить між E і B , B — між A і F). Пряма EO перетинає сторони AC і BC в точках X та Y , а пряма FO перетинає сторони AD і BD в точках U і V . Доведіть, що $XV = YU$.

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 2010 р.

150. Нехай AP та BQ — висоти даного гострокутного трикутника ABC . Побудуйте циркулем та лінійкою на стороні AB точку M так, щоб $\angle AQM = \angle BPM$.

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 2011 р.

151. На колі з діаметром AC вибрано довільну точку B , відмінну від A і C . Нехай M , N — середини хорд AB , BC , а P , Q — середини менших дуг, які стягуються цими хордами. Прямі AQ і BC перетинаються в точці K , а прямі CP і AB — в точці L . Доведіть, що прямі MQ , NP і KL перетинаються в одній точці.

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 2011 р.

152. На площині задано n ($n > 2$) точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Скількома різними способами таку множину точок можна розбити на дві непорожніх підмножини так, щоб опуклі оболонки цих підмножин не перетиналися?

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 2012 р.

153. Дано тетраедр $ABCD$. Точка X вибрана поза тетраедром так, що відрізок XD перетинає грань ABC у внутрішній точці. Позначимо через A' , B' , C' проекції точки D на площини XBC , XCA , XAB відповідно. Доведіть, що $A'B' + B'C' + C'A' < DA + DB + DC$.

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 10 клас, 2012 р.

154. На стороні AB трикутника ABC вибрано довільну точку C_1 . Точки A_1 , B_1 на променях BC і AC такі, що $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Прямі AA_1 і BB_1 перетинаються в точці C_2 . Доведіть, що всі прямі C_1C_2 проходять через одну точку.

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 2013 р.

155. На сторонах AB і AC трикутника ABC взяті точки E та F . Прямі EF і BC перетинаються в точці S . Точки M і N — середини відрізків BC та EF відповідно. Пряма, що проходить через вершину A і паралельна MN , перетинає BC в точці K . Доведіть, що $BK : CK = FS : ES$.

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 9 клас, 2013 р.

156. Коло k проходить через вершини B і C трикутника ABC ($AB > AC$) і перетинає продовження сторін AB і AC за точки B і C в точках P і Q відповідно. Нехай AA_1 — висота трикутника ABC . Відомо, що $A_1P = A_1Q$. Доведіть, що кут PA_1Q у два рази більший за кут A трикутника ABC .

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 10 клас, 2013 р.

157. Дано коло ω і точка A поза ним. Через A проведено дві прямі, одна з яких перетинає ω в точках B і C , а інша — в точках D і E (D лежить між A і E). Пряма, що проходить через D і паралельна BC , вдруге перетинає ω в точці F , а пряма AF — в точці T . Нехай M — точка перетину прямих ET і BC , а N — точка, симетрична точці A відносно M . Доведіть, що коло, описане навколо трикутника DEN проходить через середину відрізка BC .

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 2013 р.

158. Два кола Ω_1 та Ω_2 з центрами O_1 та O_2 дотикаються зовні у точці O . Точки X та Y лежать на Ω_1 та Ω_2 відповідно так, що промені O_1X та O_2Y співнапрямлені. З точки X проведено дотичні до Ω_2 , а з точки Y — до Ω_1 . Доведіть, що ці чотири прямі дотикаються одного і того ж кола, що проходить через точку O .

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 8 клас, 2014 р.

159. Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник. Доведіть, що $AC > BD$ тоді і тільки тоді, коли $(AD - BC)(AB - CD) > 0$.

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 9 клас, 2014 р.

160. Кола ω_1 і ω_2 дотикаються зовні в точці P . З точки A кола ω_2 , яка не лежить на лінії центрів кіл, проведено дотичні AB , AC до ω_1 . Прямі BP , CP вдруге перетинають ω_2 в точках E і F . Доведіть, що пряма EF , дотична до ω_2 в точці A та спільна дотична до обох кіл в точці P перетинаються в одній точці.

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 2014 р.

161. Нехай $ABCD$ — трапеція, в якій кути A і B прями, $AB = AD$, $CD = BC + AD$, $BC < AD$. Доведіть, що кут ADC в два рази більший від кута ABE , де E — середина AD .

Олімпіада з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, 8 клас, 2015 р.

Задачі Соросівських олімпіад

162. Знайти всі трійки натуральних чисел (p, q, r) , що задовольняють рівність

$$\frac{1}{p} + \frac{q}{qr - 1} = 1.$$

І Соросівська олімпіада, заочний тур, 9–10 класи, 1994 р.

163. Для яких натуральних n існує натуральне число кратне n , десятковий запис якого складається тільки з цифр 8 та 9 (можливо, тільки з цифр 8 або тільки з цифр 9)?

І Соросівська олімпіада, заочний тур, 9–11 класи, 1994 р.

164. Функція $f(x)$, яка визначена на множині невід'ємних дійсних чисел, набуває дійсних значень. Відомо, що $f(0) \leq 0$ та функція $\frac{f(x)}{x}$ неспадна для $x > 0$. Довести, що для довільних $x \geq 0$ та $y \geq 0$ виконується нерівність $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$.

І Соросівська олімпіада, заочний тур, 11 клас, 1994 р.

165. У трикутнику ABC точка перетину висот H лежить на вписаному колі. Чи обов'язково цей трикутник рівнобедрений?

І Соросівська олімпіада, очний тур, 9 клас, 1994 р.

166. Функція $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ задовольняє такі умови:

- 1) $f(f(n)) = n$ для всіх цілих n ;
- 2) $f(f(n + 2) + 2) = n$ для всіх цілих n ;
- 3) $f(0) = 1$.

Знайдіть значення $f(1995)$ та $f(-1994)$.

І Соросівська олімпіада, очний тур, 10 клас, 1994 р.

167. Дано 1995 відрізків таких, що із будь-яких трьох з них можна скласти трикутник. Довести, що, використовуючи ці 1995 відрізків, можна скласти 664 гострокутних трикутників так, щоб кожний відрізок входив до складу не більш ніж одного трикутника.

І Соросівська олімпіада, очний тур, 10 клас, 1994 р.

168. Розв'язати рівняння $[x] + [\frac{3}{2}x] + [2x] = 1995$, де $[a]$ позначає цілу частину числа a , тобто найбільше ціле число, що не перевищує a .

II Соросівська олімпіада, заочний тур, 9 клас, 1995 р.

169. Нехай O — центр вписаного кола прямокутного трикутника ABC , в якому $\angle C = 90^\circ$. На стороні BC взято точку D так, що ламана AOD ділить трикутник ABC на два рівновеликих чотирикутники. Поділіть чотирикутник $AODB$ на три частини, з яких можна скласти чотирикутник $AODC$.

II Соросівська олімпіада, заочний тур, 11 клас, 1995 р.

170. На площині дано фіксований кут з вершиною O та фіксована точка A на одній його стороні ($A \neq O$). Нехай B — довільна точка на іншій стороні кута ($B \neq O$), а P і Q — точки дотику вписаного в трикутник AOB кола зі сторонами OB та AB відповідно. Довести, що всі прямі PQ (отримані для всіх можливих положень точки B) перетинаються в одній точці.

II Соросівська олімпіада, заочний тур, 11 клас, 1995 р.

171. У гострокутному трикутнику ABC на його висотах AA_1 , BB_1 , CC_1 вибрали точки A_2, B_2, C_2 відповідно таким чином, що $\angle BA_2C = \angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$. Позначимо A_3, B_3, C_3 — точки перетину BC_2 та CB_2 , AC_2 та CA_2 , AB_2 та BA_2 відповідно. Доведіть, що відрізки AA_3 , BB_3 , CC_3 перетинаються в одній точці.

II Соросівська олімпіада, очний тур, 9 клас, 1995 р.

172. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 1$), таких, що $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, виконується нерівність

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \leq n-1.$$

II Соросівська олімпіада, очний тур, 10 клас, 1995 р.

173. Нехай O та I — центри описаного і вписаного кіл нерівнобічного трикутника ABC відповідно, H — точка перетину висот. Доведіть, що $\angle OIH > 90^\circ$.

II Соросівська олімпіада, очний тур, 10 клас, 1995 р.

174. У трикутній піраміді $SABC$ $\angle SAC + \angle CAB = \angle SBA$, $\angle SAB + \angle CAB = \angle SCA$, $SA = SB + SC$. Знайдіть величину кута між бісектрисами плоских кутів ASB та ASC .

II Соросівська олімпіада, очний тур, 11 клас, 1995 р.

175. Дано трикутник ABC , O — центр описаного навколо нього кола. Нехай M — точка перетину описаного навколо трикутника BOC кола з прямою CA , N — точка перетину описаного навколо трикутника AOC кола з прямою CB . Точки M і N відмінні від вершин трикутника ABC . Доведіть, що точки O , M і N лежать на одній прямій.

II Соросівська олімпіада, очний тур, 11 клас, 1995 р.

176. Знайти всі трійки натуральних чисел k , l , m , що задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} N(k) + N(l) = k, \\ N(k) + N(l) + N(m) = l - 4, \\ N(k) + N(l) + N(m) = \frac{1}{2}m - 2, \end{cases}$$

де $N(k)$, $N(l)$, $N(m)$ — це кількість цифр у десяткових записах чисел k , l , m відповідно.

III Соросівська олімпіада, заочний тур, 10 клас, 1996 р.

177. Нехай для всіх натуральних n $a_n = \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right]$ і $b_n = a_n - [a_n]$. Обчисліть суму $b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots + nb_n$.

III Соросівська олімпіада, заочний тур, 10 клас, 1996 р.

178. Нехай ABC — довільний рівнобедрений трикутник, в якому $AB = AC$. Позначимо A_1 , B_1 , C_1 — точки дотику вписаного в нього кола зі сторонами BC , AC , AB відповідно. Довести, що гострий кут між прямими BB_1 та CC_1 не перевищує 60° .

III Соросівська олімпіада, очний тур, 9 клас, 1996 р.

179. Всередині кута BAC вибрали дві різні точки M та N так, що відстань від точки M до сторони AB дорівнює відстані від точки N до сторони AC , причому точка A лежить на прямій MN . На бісектрисі кута BAC вибрали деяку точку K . Виявилось, що пряма MK перетинає пряму AB в точці P , а пряма NK перетинає пряму AC в точці Q . Довести, що прямі PQ та MN паралельні.

III Соросівська олімпіада, очний тур, 9 клас, 1996 р.

180. Довести, що для довільних натуральних чисел a , b , c та довільних невід'ємних чисел x , y , z виконується нерівність

$$(ax + by + cz)(bx + cy + az)(cx + ay + bz) \leq (a + b + c)^3 xyz.$$

III Соросівська олімпіада, очний тур, 9 клас, 1996 р.

181. Довести, що в довільному багатокутнику знайдуть дві сторони з такими довжинами a і b , що $\left[\frac{a}{b}\right] = 1$.

III Соросівська олімпіада, очний тур, 10 клас, 1996 р.

182. В ромбі $ABCD$ кут A дорівнює 60° . На променях CD і AD вибрали точки P і Q відповідно так, що $AP \parallel CQ$. Знайти величину кута PBQ .

III Соросівська олімпіада, очний тур, 10 клас, 1996 р.

183. Коло ω проходить через вершини B і C трикутника ABC і перетинає сторони AB і AC в їх внутрішніх точках, які ми позначимо C_1 та B_1 відповідно. Нехай O — точка перетину відрізків BB_1 і CC_1 , M — середина BC . Доведіть, що коли $AO \perp BC$, то трикутник MB_1C_1 — рівнобедрений.

III Соросівська олімпіада, очний тур, 11 клас, 1996 р.

184. Дано тригранний кут з вершиною S . Площина π перетинає ребра цього кута в точках A , B , C . Дві кулі, що вписані в даний тригранний кут, дотикаються площини π в точках P та Q і лежать по різні боки від площини π . Довести, що бісектриси кутів $\angle PAQ$, $\angle PBQ$, $\angle PCQ$ перетинаються в одній точці.

III Соросівська олімпіада, очний тур, 11 клас, 1996 р.

185. На дошці записані числа 1001^2 , 1002^2 , 1003^2 , $\dots$, 1997^2 . На кожному кроці дозволяється стерти будь-які три числа a , b і c , і замість них записати число $\frac{a}{3}$ (якщо $a \leq b \leq c$). Довести, що коли після серії таких операцій на дошці залишиться лише одне число, то воно буде менше за 2007.

IV Соросівська олімпіада, перший тур, 8 клас, 1997 р.

186. Знайти усі дійсні значення x , для яких виконується рівність

$$[x] + \frac{1}{\{x\}} = \{x\} + \frac{1}{[x]}$$

(тут $[x]$ — найбільше ціле число, що не перевищує x ; $\{x\} = x - [x]$).

IV Соросівська олімпіада, перший тур, 9 клас, 1997 р.

187. Нехай $S(n)$ — сума цифр натурального числа n (в десятковому записі). Довести, що:

а) для довільного натурального числа m знайдеться таке натуральне число a , що числа $S(a)$, $S(2a)$, $S(3a)$, $\dots$, $S(ma)$ усі парні;

б) не існує такого натурального числа a , що $S(ka)$ парне для всіх натуральних k .

IV Соросівська олімпіада, перший тур, 9 клас, 1997 р.

188. Знайти усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, для яких при всіх дійсних значеннях x одночасно виконуються дві нерівності:

$$P(x + 1997) \leq P(x) + 1997;$$

$$P(x + 1996) \geq P(x) + 1996.$$

IV Соросівська олімпіада, перший тур, 9 клас, 1997 р.

189. Нехай P — точка перетину діагоналей AC і BD вписаного в коло чотирикутника $ABCD$. Через точку P проведена пряма, яка перетинає сторону AB в точці E , а сторону CD — в точці F так, що $2\frac{PE}{PF} - 1 = \frac{AE \cdot BE}{DF \cdot CF}$. Довести, що $PE = PF$.

IV Соросівська олімпіада, перший тур, 10 клас, 1997 р.

190. Нехай

$$f(x) = \frac{7|x|}{2|\sin^{1997}x| + 7|x|^4} + \frac{3}{|x|^3}.$$

Довести, що при всіх $x \neq 0$ виконується нерівність

$$\left| f(x) + \frac{1}{2} \right| - \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{9}{1 + |x|^3}.$$

IV Соросівська олімпіада, перший тур, 10 клас, 1997 р.

191. Чи можливо розфарбувати клітинки квадрата 6×6 в чорний та білий кольори таким чином, щоб кількість чорних клітинок довільного квадрата 3×3 була більша за кількість білих клітинок цього квадрата, а кількість білих клітинок довільного квадрата 5×5 була більша за кількість чорних клітинок цього квадрата?

IV Соросівська олімпіада, другий тур, 9 клас, 1997 р.

192. Довести нерівність

$$\frac{1}{h_a - 2r} + \frac{1}{h_b - 2r} + \frac{1}{h_c - 2r} \geq \frac{3}{r},$$

де h_a, h_b, h_c — висоти деякого трикутника, а r — радіус кола, вписаного у цей трикутник.

IV Соросівська олімпіада, другий тур, 9 клас, 1997 р.

193. Знайти всі функції f , що визначені на множині всіх цілих чисел і приймають лише цілі невід'ємні значення, задовольняючи умови:

$$1) f(mn) = f(m)f(n);$$

$$2) f(m+n) \leq 1997(f(m) + f(n));$$

$$3) f(1997) = 0$$

для всіх цілих значень m та n .

IV Соросівська олімпіада, другий тур, 10 клас, 1997 р.

194. На площині задано коло ω і точку A зовні нього. З точки A до кола ω проведено дотичні AB і BC (B і C — точки дотику). Точки P і Q лежать на колі ω , а точка S — на відрізку BC так, що точки A, S, P, C лежать на колі ω_1 , точки A, S, B, Q — на колі ω_2 . При якому положенні S кут $\angle PSQ$ має найбільше значення? (Жодні дві з точок P, S, Q, B, C не співпадають. Кола ω_1, ω_2 і точки P, Q не фіксовані.)

IV Соросівська олімпіада, другий тур, 10 клас, 1997 р.

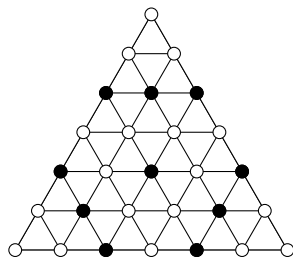
195. Довести, що коли натуральні числа m і n задовольняють рівність $m^2 + n^2 - 2(1996 + 1997)mn = 4n$, то число $1997m + 1$ — квадрат натурального числа.

IV Соросівська олімпіада, другий тур, 11 клас, 1997 р.

196. Про дійсні числа a, b, c відомо, що вони відмінні від нуля і $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$. Які значення може приймати вираз $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$?

IV Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 1997 р.

197. Правильний трикутник ABC поділено на 36 однакових трикутників прямими, паралельними його сторонам. У кожній з 28-ми вершин цих трикутників знаходиться фішка, один бік якої білий, а другий — чорний. Десять фішок лежать чорним боком догори (див. рис), а решта — білим. За один крок дозволяється перевернути на другий бік фішки, що лежать на одній з прямих, паралельних сторонам трикутника ABC , і хоча б одна із фішок цього набору повинна бути на одній з сторін трикутника ABC . Яку найменшу кількість вказаних кроків треба зробити, щоб усі фішки лежали білим боком догори?



IV Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 1997 р.

198. Всередині рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) взяли точку M так, що $\angle MBA = 20^\circ$, $\angle MAC = 30^\circ$, $\angle MCB = 40^\circ$. Знайти кути трикутника ABC .

IV Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 1997 р.

199. Довести, що існує натуральне число, куб якого закінчується на 19981997.

IV Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 1997 р.

200. Про ціле число n відомо, що число $5n$ можна подати у вигляді $2x^2 + 3y^2$, де x та y — цілі числа. Довести, що і числа $3n$ та $2n$ можна подати в такому вигляді.

IV Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 1997 р.

201. Знайти найменше число λ , при якому для всіх невід'ємних a, b, c виконується нерівність

$$a + b + c - \lambda\sqrt{ab + bc + ca} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

IV Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 1997 р.

202. На дошці зображено многокутник (не обов'язково опуклий), кожна сторона якого не є вертикальною. Нехай A — кількість вершин многокутника, для кожної з яких кут многокутника при цій вершині менший за розгорнутий, і сторони цього кута лежать праворуч від вертикальної прямої, що проходить через цю вершину. Нехай B — кількість вершин многокутника, для кожної з яких кут многокутника при цій вершині менший за розгорнутий, і сторони цього кута лежать ліворуч від вертикальної прямої, що проходить через цю вершину. Довести, що $A - B = 1$.

IV Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 1997 р.

203. Всередині рівнобедреного трикутника ABC з $\angle ABC = 100^\circ$ взято точку D так, що $\angle ABD = 25^\circ, \angle ACD = 5^\circ$. На продовженні променя BA за точку A відмітили точку E так, що $AE + CD = AC$. Чи будуть перетинатися промені AD і EC ?

IV Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 1997 р.

204. Дано тетраедр $SABC$. Нехай O — центр сфери, яка проходить через вершину S і перетинає ребра SA, SB, SC відповідно у точках A_1, B_1, C_1 таких, що навколо многогранника $ABCA_1B_1C_1$ можна описати сферу. Довести, що пряма SO перпендикулярна до площини ABC .

IV Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 1997 р.

205. Про дійсні числа x, y, z відомо, що $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$. Довести, що $x + y + z \leq 2 + xyz$.

IV Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 1997 р.

206. За якого найменшого натурального n серед будь-яких n послідовних натуральних чисел знайдеться таке число, сума цифр якого ділиться на 7?

V Соросівська олімпіада, перший етап, 8 клас, 1998 р.

207. Доведіть, що для довільних додатних чисел a , b і c , для яких $abc = 1$, справедлива нерівність

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{a^3 + c^3 + 1} \leq 1.$$

V Соросівська олімпіада, перший етап, 8 клас, 1998 р.

208. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle BAC = \angle DBC = 30^\circ$, $\angle BCA = 20^\circ$ і $\angle BDC = 70^\circ$. Доведіть, що $ABCD$ — трапеція.

V Соросівська олімпіада, перший етап, 8 клас, 1998 р.

209. Чи існують натуральні числа n і m такі, що число $\sqrt{n + \sqrt{m}} + \sqrt{m + \sqrt{n}}$ також натуральне?

V Соросівська олімпіада, перший етап, 8 клас, 1998 р.

210. На великому прийомі в посольстві зібралося 1998 осіб. Відомо, що серед довільної четвірки цих осіб знайдуться троє, які знайомі один з одним, або ж троє, які один з одним незнайомі. Доведіть, що серед цих людей можна знайти 999, які або знайомі один з одним, або ж один з одним незнайомі.

V Соросівська олімпіада, перший етап, 8 клас, 1998 р.

211. Розв'яжіть рівняння $[19x] + 98[x] = 1998$.

V Соросівська олімпіада, перший етап, 9 клас, 1998 р.

212. Декілька мафіозі зібралися на переговори за круглий стіл. Не дійшовши згоди, усі вони одночасно вихопили зброю і кожен єдиним пострілом застрелив когось з інших. Балістична експертиза виявила, що кожні два мафіозі, що сиділи за столом поруч, застрелили якихось двох мафіозі, що теж сиділи за столом поруч. Доведіть, що якісь два мафіозі застрелили один одного, якщо відомо, що принаймні в одного із застрелених влучила більш ніж одна куля¹.

V Соросівська олімпіада, перший етап, 9 клас, 1998 р.

¹Автори задачі — Ясінський В.А., Теплінський О.Ю.,

213. Відомо, що $x^3 + 1500x$ і $x^4 + 2000x^2$ — цілі числа. Доведіть, що x також є цілим числом.

V Соросівська олімпіада, перший етап, 9 клас, 1998 р.

214. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a, b, c виконується нерівність

$$\frac{a^2 + bc}{a^2 + ab} + \frac{b^2 + ca}{b^2 + bc} + \frac{c^2 + ab}{c^2 + ca} \geq 3.$$

V Соросівська олімпіада, перший етап, 9 клас, 1998 р.

215. Доведіть, що існує безліч натуральних чисел n таких, що число $\left[\frac{2^n}{n}\right]$ непарне.

V Соросівська олімпіада, перший етап, 9 клас, 1998 р.

216. Площа кожного прямокутного трикутника ABC і MNK дорівнює S , $\angle C = \angle K = 90^\circ$. Трикутники розташовані на площині так, що катети AC і KM лежать на одній прямій, точки B і N лежать по один бік від цієї прямої, а промені $[CA)$ і $[KM)$ протилежно напрямлені. Доведіть, що площа перетину цих трикутників не перевищує $\frac{2}{3}S$.

V Соросівська олімпіада, перший етап, 9 клас, 1998 р.

217. Чи можна взяти на площині скінченну кількість точок так, щоб виконувалися такі умови:

- 1) не існує прямої, яка проходить через усі відмічені точки;
- 2) якщо A, B, C — відмічені точки, які не лежать на одній прямій, то центр кола, що через них проходить, також відмічена точка?

V Соросівська олімпіада, перший етап, 9 клас, 1998 р.

218. Доведіть, що для правильного 1998-кутника $A_1A_2 \dots A_{1998}$ виконується рівність $A_1A_{668} = A_1A_{666} + \dots + A_1A_2$.

V Соросівська олімпіада, перший етап, 10 клас, 1998 р.

219. Для яких значень d існує опуклий чотирикутник з такими властивостями:

- 1) його периметр дорівнює 1;
- 2) сума його діагоналей дорівнює d ;
- 3) на кожній його стороні можна вибрати по точці (відмінній від вершин) так, щоб обрані точки були вершинами квадрата?

V Соросівська олімпіада, I етап, 10 клас, 1998 р.

220. Доведіть, що для чисел x, y, z з відрізка $[0, 1]$ виконується нерівність

$$\frac{x}{\sqrt{1+yz}} + \frac{y}{\sqrt{1+zx}} + \frac{z}{\sqrt{1+xy}} \leq \sqrt{2(x+y+z)}.$$

V Соросівська олімпіада, перший етап, 10 клас, 1998 р.

221. Знайдіть усі можливі пари таких многочленів $P(x), Q(x)$ з цілими коефіцієнтами, що $Q(0) = 0$ і для всіх x $P(Q(x)) = (x-1)(x-19)(x-199)(x-1998)$.

V Соросівська олімпіада, перший етап, 10 клас, 1998 р.

222. Числа $1, 2, \dots, 1998$ якимсь чином поділено на 5 груп (серед яких можуть бути і порожні). Доведіть, що можна знайти 6 таких чисел a, b, c, d, e, f , що належать одній групі і задовольняють рівність $a + b + c = d + e + f$.

V Соросівська олімпіада, перший етап, 10 клас, 1998 р.

223. Знайдіть усі функції двох змінних $f(x, y)$, що визначені для всіх додатних x, y і приймають додатні значення та для всіх додатних x, y, z задовольняють умови:

$$1) f(x, y) + f(x, z) = f(x, y + z + 1); \quad 2) f(x, y)f(y, x) = xy.$$

V Соросівська олімпіада, перший етап, 10 клас, 1998 р.

224. Доведіть, що нерівність

$$a + b + c \geq a \frac{c+1}{a+1} + b \frac{a+1}{b+1} + c \frac{b+1}{c+1}$$

справедлива для довільних додатних дісних чисел a, b і c .

V Соросівська олімпіада, II етап, 9 клас, 1998 р.

225. У коло вписано два прямокутники $ABCD$ і $BMDN$. На цьому колі довільно вибрано точку P і через неї проведено дві прямі l_1 та l_2 так, що пряма l_1 паралельна AB , а пряма l_2 паралельна BM . Позначимо через Q і S точки перетину l_1 з AD і BC відповідно, а через T і F — точки перетину l_2 з BN і DM відповідно. Доведіть, що $TS \perp QF$.

V Соросівська олімпіада, II етап, 9 клас, 1998 р.

226. На сторонах правильного трикутника ABC зовні його побудовані трикутники AC_1B , BA_1C і CB_1A такі, що $\angle C_1BA = \angle B_1CA = 20^\circ$, $\angle A_1BC = \angle B_1AC = 25^\circ$, $\angle C_1BA = \angle A_1CB = 15^\circ$. Знайдіть кути трикутника $A_1B_1C_1$.

V Соросівська олімпіада, II етап, 9 клас, 1998 р.

227. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \dots \cdot \frac{1996}{1997} < \frac{1}{10\sqrt[3]{1999}}.$$

V Соросівська олімпіада, II етап, 10 клас, 1998 р.

228. У країні, де налічується 2^{1998} жителів, є 2^{1997} страхових компаній. Чи можуть жителі обрати собі страхові компанії так, щоб середнє арифметичне кількості клієнтів у компанії дорівнювало 2^{1997} , а для довільних двох компаній — становила 2^{1997} жителів, які є клієнтами лише однієї з цих компаній? (Одна людина може обрати собі кілька страхових компаній, або не обирати жодної.)¹

V Соросівська олімпіада, II етап, 10 клас, 1998 р.

229. Про дійсні числа x, y, z відомо, що $x + y + z = 5$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Доведіть, що

$$4 \leq xyz \leq \frac{112}{27}.$$

V Соросівська олімпіада, II етап, 10 клас, 1998 р.

230. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x-1}{1997} + \sqrt{\frac{x-2}{1996}} + \sqrt[3]{\frac{x-3}{1995}} = \frac{x-1997}{1} + \sqrt{\frac{x-1996}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x-1995}{3}}.$$

V Соросівська олімпіада, II етап, 11 клас, 1998 р.

231. Нехай a, b, c, d — додатні дійсні числа такі, що $abcd = 1$. Доведіть, що

$$\frac{1+ab}{1+b} + \frac{1+bc}{1+c} + \frac{1+cd}{1+d} + \frac{1+da}{1+a} \geq 4.$$

V Соросівська олімпіада, II етап, 11 клас, 1998 р.

232. У просторі дано два ромби $ABCD$ і $EFGH$. Відомо, що:

- 1) площини (ABC) і (EFG) паралельні;
- 2) відрізок AE перпендикулярний до площин (ABC) і (EFG) ;
- 3) кути BAD і FEN рівні та однаково орієнтовані (один і той же поворот в просторі відносно прямої AE переводить B в D і F в H).

Нехай P і Q — середини відрізків BH та DF відповідно. Доведіть, що прямі PQ і CG — взаємно перпендикулярні.

V Соросівська олімпіада, II етап, 11 клас, 1998 р.

¹Автори задачі — Ясінський В. А., Некрашевич В. В.

233. Нехай — множина, що складається з усіх натуральних чисел n , для яких виконується нерівність

$$\{n\sqrt{2}\} + \{\sqrt{2}\} > 1.$$

Усі числа з виписано в порядку зростання. Яке число стоїть у цій послідовності на 1998-му місці?

V Соросівська олімпіада, II етап, 11 клас, 1998 р.

234. Через вершини B і C трикутника ABC провели коло, яке перетинає сторони AB і AC відповідно в точках M і N . Через вершину A провели пряму l так, що вона перетинає коло, описане навколо трикутника ABC в точці P , а пряму MN — в точці K (K лежить зовні описаного кола). Доведіть, що точки P , K , B , M лежать на одному колі.

V Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 1998 р.

235. Доведіть, що для натурального числа $n > 1$ число $\frac{(n-1)!}{n(n+1)}$ буде цілим парним числом тоді і лише тоді, коли n та $n + 1$ є складеними числами. (Тут використане позначення $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$).

V Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 1998 р.

236. Серед перших десяти тисяч натуральних чисел скільки є таких, які закінчуються нулем і можуть бути подані у вигляді $5^n + 6^m + 7^k$, де m , n , k — натуральні числа?

V Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 1998 р.

237. Про функцію f , яка визначена на множині всіх дійсних чисел і приймає дійсні значення, відомо, що $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ для $0 \leq x \leq 2$ та $f(x) = f(x+2)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Доведіть, що для дійсних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ таких, що $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, виконується нерівність $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq 1$.

V Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 1998 р.

238. Доведіть, що якщо всередині гострокутного трикутника ABC існує точка P така, що $\angle PBA = \angle PCB$, $\angle PBC = \angle PAC$, то $AB < \sqrt{2}AC$.

V Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 1998 р.

239. Знайдіть усі функції f , що визначені на множині всіх дійсних чисел і приймають дійсні значення та для яких $f(x+y) = \max(f(x), y) + \min(x, f(y))$ для всіх дійсних x, y . Тут $\max(a, b)$ і $\min(a, b)$ позначають відповідно більше та менше з чисел a, b .

V Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 1998 р.

240. Про дійсні числа x, y, z відомо, що $x + y + z = 0$. Доведіть, що виконується така нерівність: $\arctg x \cdot \arctg y + \arctg y \cdot \arctg z + \arctg z \cdot \arctg x \leq 0$.

V Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 1998 р.

241. Всередині гострокутного трикутника ABC відмічено точки M і N так, що $\angle BMC = 90^\circ$, $\angle MBA = \angle NBC$, $\angle MCA = \angle NCB$. З точки N опущено перпендикуляри NP і NQ на сторони AB та AC відповідно. Доведіть, що $AM \perp PQ$.

V Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 1998 р.

242. Знайдіть усі трійки натуральних чисел (k, l, m) , що задовольняють умову $k^{lm} l^{mk} m^{kl} = 1998^{1997} klm$. (Тут вважаємо $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

V Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 1998 р.

243. Відомо, що для даного натурального числа n існують раціональні числа p і q такі, що $\sqrt[3]{n} = p + q\sqrt[3]{3}$. Доведіть, що $n = k^3$ або $n = 3k^3$ для деякого натурального k .

V Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 1998 р.

244. Нехай σ — сфера, описана навколо довільного тетраедра $ABCD$, $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D$ — сфери, що вписані в тригранні кути тетраедра з вершинами A, B, C, D відповідно та дотикаються внутрішнім чином до σ в точках A_1, B_1, C_1, D_1 відповідно. Доведіть, що прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перетинаються в одній точці.

V Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 1998 р.

245. Нехай p, q, r — прості числа такі, що $2p > q, q > 2r$ і $q > p + r$. Доведіть, що $p + q + r \geq 20$.

VI Соросівська олімпіада, I етап, 8 клас, 1999 р.

246. Нехай CH — висота трикутника ABC , O — центр кола, описаного навколо нього. Точка T — проекція точки C на пряму AO . Доведіть, що пряма TH ділить сторону BC навпіл.

VI Соросівська олімпіада, I етап, 8 клас, 1999 р.

247. Розв'яжіть у натуральних числах таку систему рівнянь

$$\begin{cases} a^4 + 14ab + 1 = n^4, \\ b^4 + 14bc + 1 = m^4, \\ c^4 + 14ca + 1 = k^4. \end{cases}$$

VI Соросівська олімпіада, I етап, 8 клас, 1999 р.

248. Доведіть, що для будь-яких додатних дійсних x та y виконується нерівність

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{9}{4xy}$$

VI Соросівська олімпіада, I етап, 8 клас, 1999 р.

249. Нехай $ABCDEF$ — опуклий шестикутник, протилежні сторони якого попарно рівні, а точки M, N, K, L, P, Q — середини сторін AB, BC, CD, DE, EF, FA відповідно. Доведіть, що коли $MN + KL + PQ = NK + PL + MQ$, то прямі QK, NP, ML перетинаються в одній точці.

VI Соросівська олімпіада, I етап, 8 клас, 1999 р.

250. Кожна точка площини пофарбована в один із 1999 кольорів. Доведіть, що на цій площині існують чотири прямі загального положення (жодні дві з яких не паралельні і жодні три з яких не перетинаються в одній точці), всі шість точок перетину яких одноколірні.

VI Соросівська олімпіада, I етап, 8 клас, 1999 р.

251. Розв'яжіть рівняння $[x] \{x\} = 1999x$.

VI Соросівська олімпіада, I етап, 9 клас, 1999 р.

252. Чи існує функція f , що задовольняє обидві такі умови:

1) якщо $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$; 2) для всіх дійсних x правильна нерівність $f(x^2 - 1998x) - f^2(2x - 1999) \geq \frac{1}{4}$?

VI Соросівська олімпіада, I етап, 9 клас, 1999 р.

253. Через довільну внутрішню точку K трапеції $ABCD$ проведена пряма, що перетинає основи BC і AD в точках P і Q відповідно. Кола, описані навколо трикутників BPK і DQK , перетинаються, крім точки K , ще й у точці L . Доведіть, що точка L лежить на діагоналі BD .

VI Соросівська олімпіада, I етап, 9 клас, 1999 р.

254. Нехай x, y, z — дійсні числа з інтервалу $(0, 1)$. Доведіть, що

$$\frac{1}{x(1-y)} + \frac{1}{y(1-z)} + \frac{1}{z(1-x)} \geq \frac{3}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}.$$

VI Соросівська олімпіада, I етап, 9 клас, 1999 р.

255. Доведіть, що для кожного цілого числа $n \geq 1$ існує таке дійсне число α , що для будь-якого цілого $m \geq 1$ число $[\alpha^m] + 1$ ділиться на n .

VI Соросівська олімпіада, I етап, 10 клас, 1999 р.

256. На сторонах BC і AC рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) відмітили точки E і D відповідно так, що $DE \parallel AB$. На продовжені сторони CB за точку B довільним чином відмітили точку K . Нехай P — це точка перетину прямих AB і KD , Q — точка перетину прямих AK і DE . Доведіть, що CA — бісектриса $\angle PCQ$.

VI Соросівська олімпіада, II етап, 9 клас, 1999 р.

257. Нехай β — дане дійсне число. Послідовність цілих чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ є такою, що $a_1 = (\beta]$ і $a_{n+1} = (a_n + \beta]$ для всіх $n \geq 1$. Доведіть, що сума $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n}$ є цілим числом для будь-якого натурального n . (Через $(x]$ позначається найменше ціле число, що більше або рівне x .)

VI Соросівська олімпіада, II етап, 9 клас, 1999 р.

258. Для дійсного числа α позначимо через $(\alpha]$ найменше ціле число, яке не менше за α . Знайдіть усі дійсні значення x , при яких виконується рівність

$$(\sin x]^2 + (\cos x]^2 = |\operatorname{tg} x| + |\operatorname{ctg} x|.$$

VI Соросівська олімпіада, II етап, 10 клас, 1999 р.

259. Знайдіть усі функції f , що відображають множину дійсних чисел у множину дійсних чисел, задовольняючи наступні умови:

$$1) |f(x)| \geq 1,$$

$$2) f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} \text{ для всіх дійсних значень } x \text{ та } y.$$

VI Соросівська олімпіада, II етап, 10 клас, 1999 р.

260. На колі ω відмітили дві різні точки A і B . Розглядаються всі точки X кола ω , відмінні від A і B . Нехай Y — середина хорди AX , а Z — проекція точки A на пряму BX . Доведіть, що всі прямі YZ проходять через певну фіксовану точку, яка не залежить від вибору точки X .

VI Соросівська олімпіада, II етап, 10 клас, 1999 р.

261. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами такі, що для всіх дійсних x виконується рівність $(1+2x)P(2x) = (1+2^{1999}x)P(x)$.

VI Соросівська олімпіада, II етап, 11 клас, 1999 р.

262. Яке з двох чисел більше: $\sqrt{1997} + 2\sqrt{1999} + 2\sqrt{2001} + \sqrt{2003}$ чи $2\sqrt{1998} + 2\sqrt{2000} + 2\sqrt{2002}$?

VI Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 1999 р.

263. Нехай A_1, B_1, C_1 — точки дотику вписаного кола в гострокутний трикутник ABC (A_1 — точка дотику зі стороною BC і т. д.), а A_2, B_2, C_2 — точки перетину висот трикутників AB_1C_1, A_1BC_1 і A_1B_1C відповідно.

Доведіть, що прямі A_1A_2 , B_1B_2 і C_1C_2 перетинаються в одній точці.

VI Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 1999 р.

264. Послідовність цілих чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ така, що $a_1 = 1, a_2 = 2$ і для кожного натурального $n \geq 1$

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2001a_{n+1} - 1999a_n, & \text{якщо добуток } a_{n+1}a_n \text{ — парне число,} \\ a_{n+1} - a_n, & \text{якщо добуток } a_{n+1}a_n \text{ — непарне число.} \end{cases}$$

Чи існує таке натуральне m , що $a_m = 2000$?

VI Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 1999 р.

265. Знайдіть усі дійсні функції дійсного аргументу f такі, що для будь-яких x, y і z має місце рівність $f(x)f(y)f(z) - f(xyz) = xy + yz + xz + x + y + z$.

VI Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 1999 р.

266. Кола ω_1 і ω_2 перетинаються в двох точках: A і B . На колі ω_2 взято точку C таким чином, що CA — дотична до кола ω_1 . Через точку A проведено пряму, яка перетинає кола ω_1 і ω_2 в точках M і N відповідно, відмінних від точки A . Точка P — середина відрізка AC , Q — середина MN , а S — точка перетину прямої BQ з колом ω_1 , відмінна від точки B . Доведіть, що прямі AS і PQ паралельні.

VI Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 1999 р.

267. Знайдіть суму всіх можливих добутків натуральних чисел вигляду $k_1k_2 \dots k_{999}$, де в кожному добутку $k_1 < k_2 < \dots < k_{999} \leq 1999$, і не знайдуться k_i та k_j такі, що $k_i + k_j = 1999$.

VI Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 1999 р.

268. Нехай $n \geq 2$ та $x_1, x_2, \dots, x_n$ — дійсні числа з відрізка $[1; \sqrt{2}]$. Доведіть, що виконується нерівність

$$\frac{\sqrt{x_1^2 - 1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_2^2 - 1}}{x_3} + \dots + \frac{\sqrt{x_n^2 - 1}}{x_1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}n.$$

VI Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 1999 р.

269. Три сфери $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ перетинаються по одному колу ω . Нехай A — довільна точка, що лежить на колі ω . Промінь AB перетинає сфери $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в точках B_1, B_2, B_3 відповідно, промінь AC перетинає сфери $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в точках C_1, C_2, C_3 відповідно ($B_i \neq A, C_i \neq A, i = 1, 2, 3$). Відомо, що B_2 — середина відрізка B_1B_3 . Доведіть, що C_2 — середина

відрізка C_1C_3 .

VI Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 1999 р.

270. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 1998x + 1999y = (x - y)^2, \\ 1999y + 2000z = (y - z)^2, \\ 2000z + 1998x = (z - x)^2. \end{cases}$$

VII Соросівська олімпіада, I етап, 8 клас, 2000 р.

271. Знайдіть усі додатні числа x , які задовольняють рівність $x[x] + [x]\{x\} + \{x\}x = 2000$.

VII Соросівська олімпіада, I етап, 8 клас, 2000 р.

272. Нехай M і N — відповідно середини сторін BC і AD опуклого чотирикутника $ABCD$, P — точка перетину відрізків AM і BN , Q — точка перетину відрізків DM і CN . Доведіть, що пряма PQ ділить відрізок MN навпіл тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $\frac{AP}{PM} + \frac{BP}{PN} + \frac{CQ}{QN} + \frac{DQ}{QM} = 4$.

VII Соросівська олімпіада, I етап, 8 клас, 2000 р.

273. Знайдіть усі трійки дійсних чисел x, y, z , які задовольняють рівняння $2(\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = x + y + z)$.

VII Соросівська олімпіада, I етап, 9 клас, 2000 р.

274. доведіть, що для будь-яких дійсних додатних чисел x та y виконується нерівність

$$\frac{(x+y)^{16}}{x^9y^7} \geq \frac{16^{16}}{9^9 \cdot 7^7}$$

VII Соросівська олімпіада, I етап, 9 клас, 2000 р.

275. Нехай h_a, h_b, h_c — висоти трикутника, r — радіус вписаного в нього кола. Доведіть, що виконується нерівність

$$\frac{h_a + r}{h_a - r} + \frac{h_b + r}{h_b - r} + \frac{h_c + r}{h_c - r} \geq 6.$$

VII Соросівська олімпіада, I етап, 10 клас, 2000 р.

276. Нехай $d_1, d_2, \dots, d_k$ — усі такі дільники натурального числа n , що $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$. Знайдіть усі натуральні числа n , для яких $k \geq 4$ і виконується рівність $n = d_1 + d_2^2 + d_3^3 + d_4^4$.

VII Соросівська олімпіада, I етап, 10 клас, 2000 р.

277. Дано трикутник ABC , A_1 , B_1 , C_1 — точки дотику вписаного в нього кола до сторін BC , CA , AB відповідно. На променях AB і AC взято точки C_B , B_C відповідно так, що $AC_B = CA_1$, $AB_C = BA_1$. Позначимо через I_A пряму, що проходить через точку A перпендикулярно до $B_C C_B$. Аналогічно визначаються прямі I_B (при цьому в попередніх позначеннях зроблена така заміна: $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow A$) та I_C (зроблена така заміна: $A \rightarrow C$, $C \rightarrow B$, $B \rightarrow A$). Доведіть, що прямі I_A , I_B , I_C перетинаються в одній точці.

VII Соросівська олімпіада, I етап, 10 клас, 2000 р.

278. Нехай H — точка перетину висот трикутника ABC ($AB \neq AC$). Позначимо через M і N середини відрізків BC і AH відповідно, а через K — точку перетину прямої MN з бісектрисою кута BAC . Доведіть, що $\angle AKH = 90^\circ$.

VII Соросівська олімпіада, II етап, 9 клас, 2000 р.

279. Знайдіть усі пари (a, b) натуральних чисел a і b такі, що число $4a^2b^4 - 4a + b^2$ є квадратом цілого числа.

VII Соросівська олімпіада, II етап, 9 клас, 2000 р.

280. Дано трикутник ABC , в якому $AB = BC$. Точка O — центр описаного кола, точка I — центр вписаного кола трикутника. Точка D лежить на стороні BC , причому прямі DI та AB паралельні. Доведіть, що прямі DO і CI перпендикулярні.

VII Соросівська олімпіада, II етап, 10 клас, 2000 р.

281. Про квадратний тричлен із старшим коефіцієнтом 1 відомо, що він має два цілі корені і що його значення в точці 2000 дорівнює простому числу p . Знайдіть найбільше значення цього тричлена на відрізку $[1999; 2001]$ ¹.

VII Соросівська олімпіада, II етап, 10 клас, 2000 р.

282. Розв'яжіть нерівність

$$\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{3x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} + \dots + \frac{2000x}{(x+1)(2x+1)\dots(2000x+1)} > 1.$$

VII Соросівська олімпіада, II етап, 11 клас, 2000 р.

¹Автори задачі — Теплінський О. Ю., Ясінський В. А.

283. Про дійсні числа a, b, c та x, y, z відомо, що

$$a + b + c = x + y + z = ax + by + cz = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \neq 0.$$

Знайдіть всі можливі значення виразу $\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$.

VII Соросівська олімпіада, II етап, 11 клас, 2000 р.

284. Через точку, розташовану всередині круга радіуса R , провели дві взаємно перпендикулярні хорди, кожна з яких знаходиться на відстані a від центра круга. Знайдіть площу середньої за значенням частини круга.

VII Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 2000 р.

285. Всередині прямокутної трапеції $ABCD$ ($\angle B = \angle C = 90^\circ$) відмітили таку точку M , що $AM = AB$ і $DM = DC$. Нехай P і Q — проєкції точок B і C на пряму AD . Доведіть, що трикутник PMQ — рівнобедрений.

VII Соросівська олімпіада, фінальний етап, 9 клас, 2000 р.

286. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 2 \operatorname{tg} y, \\ \operatorname{tg} y + 3 \operatorname{ctg} y = 2 \operatorname{tg} z, \\ \operatorname{tg} z + 3 \operatorname{ctg} z = 2 \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

VII Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 2000 р.

287. Знайдіть усі прості числа p , для яких числа $\frac{p+1}{2}$ і $\frac{p^2+1}{2}$ є точними квадратами.

VII Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 2000 р.

288. Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b, c, x, y, z , для яких $a + b + c = x + y + z = 1$, виконується нерівність

$$\frac{ax^2}{b+c} + \frac{by^2}{c+a} + \frac{cz^2}{a+b} + \frac{1}{2} \geq 2(xy + yz + zx).$$

VII Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 2000 р.

289. Чотири промені на площині мають спільний початок. Вони перетинають пряму l у чотирьох різних точках, відтинаючи з неї три відрізки. довжини двох крайніх із цих відрізків дорівнюють x та y . Знайдіть довжину середнього, якщо відомо, що з якоїсь прямої l_0 ці самі чотири промені аналогічним чином відтинають три рівні відрізки¹.

VII Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 2000 р.

¹Автори задачі — Теплінський О. Ю., Ясінський В. А.

290. Множину всіх десятицифрових чисел, записаних лише цифрами 1, 2, 3, розбили на підмножини A , B і C таким чином, що кожні два числа, відмінні між собою в усіх десяти розрядах водночас, належать до різних підмножин. Відомо, що число 1 111 111 111 належить підмножині A , числа 1 112 111 111 і 2 222 222 222 — підмножині B . до якої з підмножин належить число 1 231 231 231?

VII Соросівська олімпіада, фінальний етап, 10 клас, 2000 р.

291. Функція $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ така, що

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} (|x - f(x)| + |y - f(y)|)$$

для всіх $x, y \in [0; 1]$. Відомо, що кожне з рівнянь $f(x) = 0$ та $f(x) = 1$ має хоча б один корінь. Знайдіть усі корені рівняння $f(x) = x$.

VII Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 2000 р.

292. Всередині квадрата $ABCD$, довжина сторони якого дорівнює 1, довільним чином відмітили точки P і Q . Доведіть, що

$$\sqrt{2}(PA + QC) + PQ + PB + QD \geq \sqrt{10}.$$

VII Соросівська олімпіада, фінальний етап, 11 клас, 2000 р.

Задачі відкритих олімпіад Рішельєвського ліцею

293. Чи може серед чотирьох невід'ємних чисел, сума яких дорівнює 1, а сума квадратів не перевищує $\frac{1}{3}$, міститися принаймні одне число, більше від $\frac{1}{2}$?

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2001 р.

294. Знайдіть усі $x \in \mathbb{R}$, для яких виконується нерівність:

$$x^2 \leq [2x] \cdot \{2x\}.$$

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2002 р.

295. Знайдіть усі $x \in \mathbb{R}$, для яких:

$$\operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg}(x + 1) \leq \operatorname{tg}(x + 2) \leq \operatorname{tg}(x + 3).$$

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2002 р.

296. Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує таке $m \in \mathbb{N}$, що число $2002m^2 + 2003m + 1$ ділиться без остачі на 2^n .

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2002 р.

297. Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b, c виконується нерівність:

$$(a + b + c) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq 6 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2002 р.

298. Знайдіть усі $n \in \mathbb{N}$, для яких виконується рівність $[\sqrt{2}n] = \left[\frac{3n}{2}\right]$.

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2002 р.

299. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел a і b , що числа $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ і $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ є цілими.

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2003 р.

300. Дано трикутник ABC , у якому $AC = BC$. На його сторонах AC і BC відмічено точки D і F відповідно так, що $AD = FD$ і $CD \leq CF$. Нехай точка M — середина відрізка BF , а E — точка перетину прямих AB і DM . Доведіть, що $\angle BEF = \angle DAF$.

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2003 р.

301. Відрізок AL — бісектриса трикутника ABC . Дотична до описаного кола трикутника ABL , проведена через точку B , перетинає в точці K дотичну до описаного кола трикутника ACL , проведenu через точку C . Доведіть, що точки A, L і K лежать на одній прямій.

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2004 р.

302. Знайдіть усі такі трійки натуральних чисел x, y, z , що справджується рівність $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = 2$.

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2004 р.

303. Трикутник розташовано всередині квадрата так, що центр квадрата лежить зовні цього трикутника, а на сторонах квадрата немає жодної вершини трикутника. Доведіть, що довжина однієї із сторін трикутника менша від довжини сторони квадрата.

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2004 р.

304. Доведіть, що існує безліч таких функцій $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, що для всіх $x \in \mathbb{Z}$ виконується рівність: $f(f(x)) = -x$.

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2004 р.

305. Усередині трикутника ABC на його медіані BM обрано точку N . Нехай $K = AN \cap BC$, $L = CN \cap AB$. Відомо, що навколо чотирикутника $BKNL$ можна описати коло. Доведіть, що пряма AC є спільною дотичною до кіл, описаних навколо трикутників ABN і CBN .

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2004 р.

306. Усередині опуклого чотирикутника $ABCD$ відмічено таку точку F , що $\angle FAB = \angle FDC$ і $\angle FBA = \angle FCD$. Нехай FM і FN — висоти трикутників FAB і FCD відповідно. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини сторін BC і AD , ділить відрізок MN навпіл.

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2005 р.

307. Нехай a, b, c такі додатні дійсні числа, що $a + b + c = 1$. Доведіть, що:

$$\frac{3a-1}{1-a^2} + \frac{3b-1}{1-b^2} + \frac{3c-1}{1-c^2} \geq 0.$$

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2005 р.

308. Дано трикутник ABC , у якому $AB \neq AC$. На його сторонах AB і AC відмічено точки M і N відповідно так, що $BM = CN$. Описане коло трикутника AMN перетинає описане коло трикутника ABC в точці D , відмінній від A . Доведіть, що $DM = DN$.

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2006 р.

309. Миколка прагне пофарбувати якомога більше клітинок клітчастої дошки розміром 2007×2007 . За один крок йому дозволяється фарбувати відрізу дві ще непофарбовані клітинки, котрі мають рівно одну спільну вершину, але які не утворюють квадрата розміром 2×2 з іншою парою клітинок, пофарбованих одночасно на одному з попередніх кроків. Визначте, яку найбільшу кількість клітинок зуміє пофарбувати Миколка з дотриманням таких вимог.

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2006 р.

310. Нехай x, y, z такі додатні дійсні числа, що $xyz = 1$. Доведіть, що:

$$x^2(y^4 - y) + y^2(z^4 - z) + z^2(x^4 - x) \geq 0.$$

Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2006 р.

Задачі комплексної олімпіади з математики, фізики, інформатики «Турнір чемпіонів»

311. Чи існує таке натуральне число n , для якого добуток

$$(1 + 1^2 + 1^4)(1 + 2^2 + 2^4)(1 + 3^2 + 3^4) \dots (1 + n^2 + n^4)$$

є квадратом цілого числа?

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2009 р.

312. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{y} = \frac{26}{9}, \\ \sqrt{y} - \frac{1}{z} = \frac{26}{9}, \\ \sqrt{z} - \frac{1}{x} = \frac{26}{9}. \end{cases}$$

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2009 р.

313. Нехай a, b, c такі додатні дійсні числа, що $abc = 1$. Доведіть, що:

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geq 3(a + b + c)(ab + bc + ca).$$

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2009 р.

314. Для множини невід'ємних цілих чисел $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k > 2$ позначимо через $A + A$ — множину всіх чисел виду $a_i + a_j$, а через $A - A$ — множину всіх чисел виду $a_i - a_j$, де i та j пробігають всі можливі цілі значення від 1 до k . Наприклад, для $A = \{1, 2, 3, 4\}$ матимемо: $A + A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а $A - A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Чи може трапитися так, що число елементів в $A + A$ буде більшим за число елементів в $A - A$?

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2009 р.

315. а) Чи існує два рівних дев'ятикутники, всі вершини яких співпадають, але жодні дві сторони не співпадають?

б) Чи існує три рівних дев'ятикутники, всі вершини яких співпадають, але жодні дві сторони не співпадають?

(Нагадаємо, що многокутником на площині називають просту (без самоперетинів) замкнену ламану, сусідні ланки якої не лежать на одній прямій.)

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2009 р.

316. Обчисліть добуток:

$$(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 1^\circ) \cdot (\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdot \dots \cdot (\sqrt{3} + \operatorname{tg} 29^\circ) \cdot (\sqrt{3} + \operatorname{tg} 30^\circ).$$

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2010 р.

317. Чи існує таке просте трицифрове число $\overline{abc}$, для якого $b^2 - 4ac$ — квадрат цілого числа?

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2010 р.

318. На сторонах AB і BC довільно відмітили точки M і N відповідно. Нехай P — точка перетину відрізків AN і BM . Крім цього, відмітили точки Q і R так, що чотирикутники $MCNQ$ і $ACBR$ — паралелограми. Доведіть, що точки P , Q і R лежать на одній прямій.

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2010 р.

319. Нехай a , b , c — додатні дійсні числа. Доведіть нерівність:

$$\frac{a}{b(b+c)^2} + \frac{b}{c(c+a)^2} + \frac{c}{a(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2010 р.

320. Зайдіть усі такі функції f , які визначенні на множині всіх дійсних чисел і набувають дійсних значень, що для всіх дійсних x і y справджується рівність:

$$f(f(x) - y) = f(x^2 + y) - 4f(x)y.$$

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2010 р.

321. Про цілі числа a , b , c відомо, що $a^2 + 2bc = 1$ і $b^2 + 2ca = 2012$. Знайдіть усі можливі значення виразу $c^2 + 2ab$.

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2012 р.

322. Про трикутник ABC відомо, що AM — його медіана, а $\angle AMC = \angle BAC$. На промені AM відмітили точку K таку, що $\angle ACK = \angle BAC$. Доведіть, що центри описаних кіл трикутників ABC , ABM і KCM лежать на одній прямій.

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2012 р.

323. Дві послідовності (x_n) і (y_n) дійсних чисел задаються наступним чином:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$$

для всіх натуральних $n \geq 1$. Доведіть, що $[x_n y_n] = 2$ для всіх натуральних $n > 1$.

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2012 р.

324. Нехай α, β, γ — числа із інтервалу $(0; \frac{\pi}{2})$. Доведіть нерівність:

$$\frac{4 \sin \alpha + 3 \sin \beta + 2 \sin \gamma}{2 \sin \alpha + 3 \sin \beta + 4 \sin \gamma} + \frac{4 \sin \beta + 3 \sin \gamma + 2 \sin \alpha}{2 \sin \beta + 3 \sin \gamma + 4 \sin \alpha} + \frac{4 \sin \gamma + 3 \sin \alpha + 2 \sin \beta}{2 \sin \gamma + 3 \sin \alpha + 4 \sin \beta} \geq 3.$$

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2012 р.

325. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які задовольняють рівність:

$$f(x + f(y) - 2012) = x + y$$

для будь-яких дійсних x та y .

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2012 р.

326. Нехай x, y, z такі додатні числа, що $x + y + z = 1$. Доведіть, що:

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)} + \frac{8}{(1+x)(1+y)(1+z)} \leq \frac{1}{4xyz}.$$

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2013 р.

327. На основі ABC трикутної піраміди $SABC$ відмітили точку M і через неї провели прямі, паралельні ребрам SA, SB і SC , які перетинають бічні грані в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що:

$$\sqrt{MA_1} + \sqrt{MB_1} + \sqrt{MC_1} \leq \sqrt{SA + SB + SC}.$$

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2013 р.

328. Послідовність (x_n) , $n \geq 1$ раціональних чисел визначається в такий спосіб: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ і $x_n = \frac{x_{n-1}^2 + x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-2}^2}{x_{n-3}}$ при усіх $n \geq 4$. Доведіть, що x_{2013} — ціле число.

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2013 р.

329. Нехай n — натуральне число, $n > 2013$, а G — зв'язний граф з n вершинами та n ребрами. Розглянемо всі можливі орієнтації ребер G . Одержимо скінчену множину $\Omega = \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \dots\}$ орієнтованих графів $\vec{G}_i$. Дозволяється обрати вершину графа $\vec{G}_i$ таку, що всі ребра, для яких ця вершина є кінцем, або орієнтовані в неї, або орієнтовані із неї, і орієнтацію усіх цих ребер змінити на протилежну. В результаті чого отримуємо деякий граф $\vec{G}_j$ із Ω . Будемо вважати два орієнтованих графи

із Ω еквівалентними, якщо один із них можна отримати із другого за допомогою декількох вказаних вище дій по зміні орієнтації. Яка найбільша кількість попарно нееквівалентних графів може бути в Ω ?

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2013 р.

330. Нехай φ таке дійсне число, що обидва числа $\cos 2014\varphi$ і $\cos 2015\varphi$ — раціональні. Доведіть, що існує таке натуральне число $n > 2015$, що обидва числа $\cos(n-1)\varphi$ і $\cos n\varphi$ також раціональні.

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2014 р.

331. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, у яких старший коефіцієнт дорівнює 1 і для яких рівність

$$P(2P(x)) = 2P(P(x)) + 2(P(x))^2$$

виконується для будь-якого дійсного числа x .

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2014 р.

332. Нехай k — коло з центром O , яке описане навколо заданого гострокутного трикутника ABC . Позначимо через H — точку перетину висот трикутника ABC , а через P і Q — середини дуги BC кола k , перша із яких не містить точку A , а друга містить її, причому Q не співпадає з A . Пряма l , яка проходить через точку Q , паралельно до AC , перетинає коло k у двох різних точках Q і S . Нехай M і N — середини відрізків BC і HP відповідно. Доведіть, що прямі MN і BS паралельні.

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2014 р.

333. Знайдіть усі трійки (x, y, z) натуральних чисел, які задовольняють рівність:

$$(x + y^2 + z^2)^2 - 8xyz = 1.$$

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2014 р.

334. Розглянемо множину цифр $C = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Знайдіть число усіх не порожніх підмножин A множини C , для кожної із яких виконуються наступні обидві умови:

- 1) сума усіх елементів множини A ділиться на 3;
- 2) сума усіх елементів множини A не ділиться на 5.

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2014 р.

335. Розв'язати рівняння:

$$\cos 3x + 39 \cos x = 32x^3 + 48x^2 + 96x + 40.$$

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2015 р.

336. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ і $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ для всіх натуральних n . Доведіть, що для будь-якого натурального числа m існує такий індекс k , що m ділить x_k .

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2015 р.

337. Дано трикутник ABC . Нехай Ω — описане коло цього трикутника, а ω — вписане коло цього трикутника. Нехай δ — коло, яке дотикається сторін AB і AC , а також дотикається внутрішнім чином кола Ω у точці D . Пряма AD перетинає коло ω у двох точках P і Q (P лежить між A і Q). Нехай O та I — центри кіл Ω і ω відповідно. Доведіть, що $OD \parallel IQ$.

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2015 р.

338. Нехай $P(x)$ — многочлен 20-го степеня з дійсними коефіцієнтами, а $f(x) = \frac{1}{x^{40}}$. Чи можуть графіки функцій $y = P(x)$ і $y = f(x)$ перетинатися рівно в 30 точках?

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2015 р.

339. Розв'язати в натуральних числах рівняння:

$$2^n + 3 = 11^k.$$

«Турнір чемпіонів», старша ліга, 2015 р.

Задачі, опубліковані в журналі «У світі математики»

340. У деякій країні 1995 міст і між кожними двома містами є безпосереднє сполучення деяким (але лише одним) видом транспорту. Видів транспорту у цій країні лише три: автомобільний, залізничний та авіація. Туристична фірма хоче організувати маршрут, який охоплював би більше половини міст країни, а туристи весь час користувалися одним і тим же видом транспорту. Чи може фірма це зробити?

Журнал «У світі математики», №1, 1995 р.

341. Доведіть, що в перерізі правильної чотирикутної піраміди площиною правильний п'ятикутник можна отримати лише тоді, коли бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45° .

Журнал «У світі математики», №1, 1996 р.

342. Позначимо через $S(n)$ суму цифр десяткового запису натурального числа n .

а) Доведіть, що для кожного натурального n виконується нерівність: $S(n) \leq 5 \cdot S(2n)$.

б) Доведіть, що існує нескінченна множина натуральних чисел n , для яких виконується нерівність: $S(n) > 1996 \cdot S(3n)$.

Журнал «У світі математики», №2, 1996 р.

343. Для яких натуральних чисел n послідовність:

$$a_1 = n, \quad a_{k+1} = 2a_k - [\sqrt{a_k}]^2, \quad k \geq 1,$$

буде періодичною?

Журнал «У світі математики», №2, 1996 р.

344. Розв'яжіть рівняння:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 + \frac{n}{2n+1} = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{2n-1}x_{2n} + x_{2n}.$$

Журнал «У світі математики», №3, 1996 р.

345. Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b, c виконується нерівність:

$$ab + bc + ca \leq 1 + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

Журнал «У світі математики», №3, 1996 р.

346. Якого найменшого значення може набувати вираз:

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin \gamma \sin \alpha}{\sin^2 \frac{\beta}{2}},$$

якщо α, β і γ — кути трикутника?

Журнал «У світі математики», №4, 1996 р.

347. Нехай O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC . Перпендикуляр, проведений з точки A до прямої CO , перетинає пряму CB в точці M . Обчисліть $|CM|$, якщо $|CA| = a$ і $|CB| = b$.

Журнал «У світі математики», №4, 1996 р.

348. Всередині правильної піраміди $A_1A_2A_3 \dots A_{1997}$ із вершиною в точці A_{1997} вибрали точку A . Потім із цієї точки опустили перпендикуляри $AB_1, AB_2, \dots, AB_{1996}$ на кожне з бічних ребер піраміди. Доведіть, що відрізки $A_{1997}B_1, A_{1997}B_2, \dots, A_{1997}B_{1996}$ можна розбити на дві групи так, щоб суми довжин відрізків у цих групах були однаковими.

Журнал «У світі математики», №1, 1997 р.

349. Послідовність $\{x_n: n \geq 1\}$ задана таким чином:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{1996} = 0, \quad x_{1997} = 1,$$

$$x_{n+1997} = \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+1996}}{1997}, \quad n \geq 1.$$

Доведіть, що ця послідовність збігається, та знайдіть її границю.

Журнал «У світі математики», №2, 1997 р.

350. Через вершини трикутник ABC одиничної площі проведені перпендикуляри до його площини, на яких взято точки A_1, B_1, C_1 відповідно. Усі ці точки розташовано по один бік від площини ABC і відрізки AA_1, BB_1 та CC_1 рівні відповідним висотам даного трикутника. Нехай S — точка перетину площин AB_1C_1, A_1BC_1 та A_1B_1C . Знайти площу поверхні піраміди $SABC$.

Журнал «У світі математики», №3, 1997 р.

351. Побудуйте опуклий чотирикутник, знаючи ортогональні проекції точки перетину його діагоналей на всі чотири сторони.

Журнал «У світі математики», №4, 1997 р.

352. Доведіть, що площа трикутника зі сторонами a, b та c менша за $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$.

Журнал «У світі математики», №1, 1998 р.

353. Нехай O позначає центр правильного шестикутника $A_1A_2 \dots A_6$. Всередині кожного з трикутників $OA_1A_2, \dots, OA_6A_1$ відмітили по одній точці $B_1, \dots, B_6$ відповідно таким чином, що $\angle B_1A_2B_2 = \dots = \angle B_6A_1B_1 = 60^\circ$. Доведіть, що площа дванадцятикутника $A_1B_1A_2B_2 \dots A_6B_6$ не менша за половину площі шестикутника $A_1A_2 \dots A_6$.

Журнал «У світі математики», №2, 1998 р.

354. Знайдіть довжину найменшого ребра тетраедра максимального об'єму при умові, що сума довжин деяких чотирьох його ребер дорівнює 1.

Журнал «У світі математики», №3, 1998 р.

355. Знайдіть всі дійсні значення $x \geq 998$, для яких вираз $\left[\frac{x}{1998} \right] \left[\frac{x}{998} \right]$ набуває свого найбільшого значення.

Журнал «У світі математики», №4, 1998 р.

356. У трикутну піраміду $ABCD$ вписана сфера ω з радіусом r , яка дотикається до граней ABC, BCD, CDA, DAB відповідно в точках $D_1,$

A_1, B_1, C_1 . Прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 вдруге перетинають сферу ω відповідно в точках A_2, B_2, C_2, D_2 . Доведіть, що:

$$AA_1 \cdot A_1A_2 + BB_1 \cdot B_1B_2 + CC_1 \cdot C_1C_2 + DD_1 \cdot D_1D_2 \geq 32r^2.$$

Журнал «У світі математики», №4, 1998 р.

357. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a, b, c виконується нерівність:

$$\frac{a^{2000}}{b+c} + \frac{b^{2000}}{c+a} + \frac{c^{2000}}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}).$$

Журнал «У світі математики», №1, 1999 р.

358. Діагоналі вписаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O . На променях OA та OB вибрали точки P і Q відповідно так, що $\angle DAQ = \angle CBP$. Доведіть, що точка O та середини відрізків PQ і BC лежать на одній прямій.

Журнал «У світі математики», №1, 1999 р.

359. Два кола різних радіусів дотикаються прямої l в точках A і B і перетинаються в точках C і D . Нехай H_1 — ортоцентр трикутника ABC , а H_2 — ортоцентр трикутника ABD . Доведіть, що H_1CH_2D — паралелограм.

Журнал «У світі математики», №2, 1999 р.

360. На діагоналі AC опуклого чотирикутника $ABCD$ вибрали точку H так, що $BH \perp AC$. Крім того, відомо, що $AB \perp BC$ і $AO \perp DH$, де O — центр кола, описаного навколо трикутника ACD . Доведіть, що $AB = AD$.

Журнал «У світі математики», №3, 1999 р.

361. Побудуйте за допомогою циркуля та лінійки трикутник ABC , знаючи положення вершини A , середини сторони BC і точки перетину висот.

Журнал «У світі математики», №3, 1999 р.

362. Знайдіть кути опуклого вписаного чотирикутника, якщо відомо, що кожна його діагональ є бісектрисою одного кута і трисектрисою протилежного.

Журнал «У світі математики», №4, 1999 р.

363. Діагоналлю многогранника називають відрізок, що сполучає дві його вершини і не є ребром чи діагоналлю грані. Скільки вершин може

мати опуклий многогранник, в якого є принаймні дві діагоналі і вони всі рівні між собою?

Журнал «У світі математики», №4, 1999 р.

364. Побудуйте за допомогою циркуля і лінійки трикутник ABC , знаючи положення вершини A , точки M — середини сторони BC і H — точки перетину висот трикутника ABC .

Журнал «У світі математики», №1, 2000 р.

365. На продовженні сторони AC трикутника ABC за точку C вибрали точку R . Через точку R провели пряму так, що вона перетинає сторону AB в точці C_1 , а сторону BC — в точці A_1 . Нехай P — середина сторони AC , Q — середина сторони A_1C_1 . Доведіть, що три кола, описані навколо трикутників ABC , A_1BC_1 та PQR , перетинаються в одній точці.

Журнал «У світі математики», №1, 2000 р.

366. Відомо, що дійсні числа a та b вибрано таким чином, що для всіх дійсних x виконується нерівність: $|a \sin(x) + b \sin(2x)| \leq 1$. Доведіть, що для всіх дійсних x виконується нерівність: $|a + 2b \cos(x)| \leq 2$.

Журнал «У світі математики», №2, 2000 р.

367. Доведіть, що для довільних чисел a, b, c, d виконується нерівність:

$$\frac{bcd}{a^3 + bcd} + \frac{cda}{b^3 + cda} + \frac{dab}{c^3 + dab} + \frac{abc}{d^3 + abc} \leq 1.$$

Журнал «У світі математики», №3, 2000 р.

368. Знайдіть довжину найменшого ребра тетраедра максимального об'єму серед тетраедрів, у яких сума довжин деяких чотирьох ребер рівна одиниці.

Журнал «У світі математики», №4, 2000 р.

369. Функцію $f : (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ задано умовами:

1) $f(x) = x$ для всіх ірраціональних $x > 1$;

2) Якщо $x = \frac{p}{q}$, де p і q — взаємно прості натуральні числа, то $f(x) = \frac{p}{q+1}$.

Знайдіть найменше значення функції f на інтервалі $(\frac{1000}{1999}, \frac{999}{998})$.

Журнал «У світі математики», №4, 2000 р.

370. Доведіть, що для будь-яких трьох чисел α, β, γ з інтервалу $(0; \frac{\pi}{2})$ виконується нерівність:

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \beta \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + \gamma \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

Журнал «У світі математики», №1, 2001 р.

371. На площині розташовано два однаково орієнтовані трикутники ACB та ADE . При цьому $\angle DEA = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle DAE = \angle BAC$, $E \neq C$. Через точку D проведено пряму l , яка перпендикулярна до прямої EC . L — точка перетину прямих l та AC . Доведіть, що точки L, E, C, B лежать на одному колі.

Журнал «У світі математики», №1, 2001 р.

372. У Імперії деякі міста з'єднано авіаційними рейсами. При цьому для кожних трьох міст Імперії з будь-якого можна прилетіти в будь-яке (можливо, з пересадками), не пролітаючи при цьому через третє місто. Всього в Імперії 2000 міст. Доведіть, що міста можна розділити між двома спадкоємцями Імператора так, що міст у кожного спадкоємця буде порівну та будь-які два міста, що належать одному спадкоємцеві, сполучені маршрутом, що проходить лише через міста цього спадкоємця.

Журнал «У світі математики», №2, 2001 р.

373. Доведіть, що для будь-яких трьох чисел α, β, γ з інтервалу $(0; \frac{\pi}{2})$ виконується нерівність:

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{2 \sin \alpha} + \beta \frac{\sin \gamma + \sin \alpha}{2 \sin \beta} + \gamma \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2 \sin \gamma}.$$

Журнал «У світі математики», №2, 2001 р.

374. Знайдіть всі пари натуральних чисел $(a; b)$, для яких число $19^a + 98^b$ є квадратом цілого числа.

Журнал «У світі математики», №3, 2001 р.

375. Кола $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ вписані в кути A, B, C трикутника ABC відповідно, лежать всередині трикутника і проходять через центр кола, вписаного в трикутник ABC . Нехай r_A, r_B, r_C — радіуси кіл $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ відповідно, а r — радіус кола, вписаного в трикутник ABC . Доведіть, що виконується нерівність: $\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} \leq \frac{9}{2r}$.

Журнал «У світі математики», №3, 2001 р.

376. Знайдіть всі дійсні числа α, β такі, що рівність $19^{\alpha x} + 99^{\beta x} = \alpha \cdot 19^{x+\alpha-1} + \beta \cdot 99^{x+\beta-1}$ виконується для всіх дійсних x .

Журнал «У світі математики», №3, 2001 р.

377. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ — додатні числа та $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Доведіть, що існує такий номер $1 \leq k \leq n$, що $a_k a_{k+1}^2 (a_{k+1}^3 + 2) \geq 3$ (тут $a_{n+1} = a_1$).

Журнал «У світі математики», №1, 2002 р.

378. Нехай a — таке дійсне число, що рівняння

$$\left(\frac{x-1000}{(x-1001)^2} - \frac{x-1001}{(x-1000)^2} \right)^{2001} = a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2001} \right)^{2000}$$

має своїм найбільшим коренем число 2002. Знайдіть найменший корінь цього рівняння.

Журнал «У світі математики», №1, 2002 р.

379. Нехай $S = \{1, 2, \dots, 2001, 2002\}$. Функція $f : S \rightarrow S$ визначається наступним чином: $f(i) = i + 1$ для всіх $i = 1, 2, 3, \dots, 998, 1000, 1001, \dots, 2001$; $f(999) = 1$ та $f(2002) = 1000$. Доведіть, що можна означити функцію $g : S \rightarrow S$ так, що $g(g(n)) = f(n)$ для всіх n із S .

Журнал «У світі математики», №4, 2002 р.

380. Нехай $S(n)$ — сума цифр натурального числа n і послідовність (a_n) визначена рівностями: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = S(a_n + S(a_n))$ для всіх $n \geq 1$.

Знайдіть значення виразу:

$$a_1 + S(a_2) + S(S(a_3)) + \dots + \underbrace{S(\dots(S(a_{2005})))}_{2004}.$$

Журнал «У світі математики», №3, 2004 р.

381. Про дійсні числа a, b, c відомо, що $a + b + c = 2$ та $ab + bc + ca = 1$. Доведіть, що:

$$\max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\} \leq \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Журнал «У світі математики», №3, 2004 р.

382. Про 2004 натуральних числа $a_1, a_2, \dots, a_{2004}$ відомо, що: $a_1 = 2004$ та

$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{a_n + \left\lceil \frac{2004}{a_n} \right\rceil}{2} \right\rfloor, \quad 1 \leq n \leq 2003.$$

Знайдіть найменше серед цих чисел.

Журнал «У світі математики», №4, 2004 р.

383. Нехай I — центр кола, вписаного в трикутник ABC , r — його радіус. Пряма l проходить через точку I та перетинає вписане коло в точках P і Q , а коло, описане навколо трикутника ABC , — в точках M і N , причому P лежить між точками M та I . Доведіть, що $MP + NQ \geq 2r$.

Журнал «У світі математики», №4, 2004 р.

384. Про дійсні числа x, y, z відомо, що:

$$\begin{cases} |x + y + z| \leq 1, \\ |x - y + z| \leq 1, \\ |4x + 2y + z| \leq 8, \\ |4x - 2y + z| \leq 8. \end{cases}$$

Довести, що $|x| + 3|y| + |z| \leq 7$.

Журнал «У світі математики», №4, 2005 р.

385. Знайти всі натуральні значення $n > 1$, для яких виконується рівність:

$$\left[\frac{\sqrt[n]{1}}{1} + \frac{\sqrt[n]{2}}{2} + \frac{\sqrt[n]{3}}{3} + \dots + \frac{\sqrt[n]{2^n}}{2^n} \right] = 2005$$

(тут $[x]$ позначає цілу частину числа x).

Журнал «У світі математики», №4, 2005 р.

386. Дано правильний трикутник ABC і точку M , яка лежить всередині нього. Позначимо A_1, B_1, C_1 точки перетину прямих AM та BC , BM та AC , CM та AB відповідно. Довести нерівність:

$$A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 \geq \frac{1}{2}(A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A \cdot AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1).$$

Журнал «У світі математики», №1, 2006 р.

387. Розв'язати нерівність: $x^2 \cdot [x] \leq \sqrt{2006 - x^2}$ (тут $[x]$ позначає цілу частину числа x).

Журнал «У світі математики», №1, 2006 р.

388. Нехай $ABCD$ — трапеція, коло ω_1 з центром O_1 вписане в трикутник ABD , а коло ω_2 з центром O_2 дотикається до сторони CD та продовжень сторін BC і BD трикутника BCD , причому $AD \parallel O_1O_2 \parallel BC$. Довести, що $AC = O_1O_2$.

Журнал «У світі математики», №2, 2006 р.

389. Розв'язати рівняння: $\sqrt{2 - 2\cos x} + \sqrt{5 - 4\cos x} = \sqrt{5 - 4\cos 2x}$.

Журнал «У світі математики», №3, 2006 р.

390. Дано опуклий n -кутник. Розглянемо множину T правильних трикутників зі стороною 1, всі вершини яких є вершинами даного n -кутника.

а) Довести, що в множині T не більше $\frac{2n}{3}$ трикутників.

б) Довести, що при кожному $0 < \lambda < \frac{2}{3}$ існує n -кутник, для якого множина T містить більше λn трикутників.

Журнал «У світі математики», №3, 2006 р.

391. Всередині даного гострого кута BAC задано точки P і Q такі, що $PQ \not\perp AC$. За допомогою циркуля та лінійки на стороні AB даного кута побудуйте таку точку R , щоб бісектриса RL трикутника PQR була перпендикулярною до сторони AC .

Журнал «У світі математики», №1, 2007 р.

392. Знайти всі пари натуральних чисел (m, n) такі, що $7(m^5 - n^5) = 41m^2n^2 + 1$.

Журнал «У світі математики», №3, 2007 р.

393. На сторонах трикутника ABC зовні побудували квадрати BCC_1B_2 , CAA_1C_2 , ABB_1A_2 , а O_A , O_B , O_C — центри цих квадратів. Нехай A_0 , B_0 , C_0 — точки перетину прямих A_1B_2 і C_1A_2 , A_1B_2 і B_1C_2 , C_1A_2 і B_1C_2 відповідно. Довести, що прямі O_AA_0 , O_BB_0 і O_CC_0 перетинаються в одній точці.

Журнал «У світі математики», №4, 2007 р.

394. У просторі відмітили 10 різних точок $T_1, T_2, \dots, T_{10}$ і деякі з них з'єднали відрізками, що не перетинаються. Жук знаходиться у точці T_1 і може переповзти по відрізках у точку T_{10} . Довести, що виконується принаймні одна з умов:

1) існує маршрут жука з T_1 у T_{10} , який проходить через щонайбільше дві точки, відмінні від T_1 та T_{10} ;

2) існують такі точки T_i та T_j ($2 \leq i < j \leq 10$), що будь-який маршрут жука з T_1 в T_{10} проходить через точку T_i або через точку T_j .

Журнал «У світі математики», №1, 2008 р.

395. Функція $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ задовольняє нерівність: $f(3x) \geq f\left(\frac{1}{2}f(2x)\right) + 2x$ при всіх $x > 0$. Довести, що $f(x) \geq x$ при всіх $x > 0$.

Журнал «У світі математики», №3, 2008 р.

396. Знайти всі послідовності $\{a_n, n \geq 1\}$ натуральних чисел такі, що при усіх натуральних m і n число $\frac{n+m^2}{a_n+a_m^2}$ є натуральним.

Журнал «У світі математики», №4, 2008 р.

397. У трикутну піраміду $SABC$ вписали кулю, яка дотикається граней SAB , SBC та SAC у точках G , I та O відповідно. Відомо, що G — точка перетину медіан трикутника SAB , I — центр вписаного кола трикутника SBC та O — центр описаного кола трикутника SAC . Довести, що прямі AI , BO та CG перетинаються в одній точці.

Журнал «У світі математики», №4, 2008 р.

398. Знайти найменше значення виразу $(x - y)^2 + \left(\sqrt{2 - x^2} - \frac{9}{y}\right)$ за умов, що $0 < x < \sqrt{2}$, $y > 0$.

Журнал «У світі математики», №1, 2009 р.

399. Знайти усі натуральні n такі, що:

$$\left[\sqrt{n^2 - n} + \sqrt{n^2 - n} + \sqrt[3]{n^3 - n} + \sqrt[3]{n^3 - n} + \sqrt[3]{n^3 - n} \right] = 2009$$

(тут $[x]$ позначає цілу частину числа x).

Журнал «У світі математики», №2, 2009 р.

400. Нехай G — точка перетину медіан трикутника ABC . Позначимо r , r_1 , r_2 та r_3 радіуси кіл, вписаних у трикутники ABC , GBC , GAC та GAB відповідно та p — півпериметр трикутника ABC . Довести, що:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \geq \frac{3}{r} + \frac{18}{p}.$$

Журнал «У світі математики», №2, 2009 р.

401. Нехай x , y , z — такі додатні числа, що $x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{3}{2}$. Довести, що:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2(x + y + z).$$

Журнал «У світі математики», №3, 2009 р.

402. Знайдіть найбільше дійсне число λ таке, що при всіх дійсних x виконується нерівність:

$$x^{2010} \geq \lambda [x]^{2009} \{x\}$$

(тут $[x]$ — ціла частина числа x , $\{x\} = x - [x]$ — дробова частина числа x).

Журнал «У світі математики», №3, 2009 р.

403. Нехай x та y — додатні числа, для яких виконується нерівність: $3(x+y) \geq 2(xy+1)$. Довести, що: $9(x^3+y^3) \geq x^3y^3+1$.

Журнал «У світі математики», №1, 2010 р.

404. Нехай $a_k = \sqrt[3]{k + \sqrt{k^2 - 1}} + \sqrt[3]{k - \sqrt{k^2 - 1}} + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Довести, що $\{a_k^3\} = \{3a_k^2\}$, $k \geq 1$ (тут $\{x\}$ — дробова частина числа x).

Журнал «У світі математики», №1, 2010 р.

405. Нехай A, B, C та a, b, c — додатні дійсні числа. Довести нерівності:

а) $aA^2 + bB^2 + cC^2 \geq AB \cdot \min(a, b) + BC \cdot \min(b, c) + CA \cdot \min(c, a)$;

б) $A^2 \cdot \max(b, c) + B^2 \cdot \max(c, a) + C^2 \cdot \max(a, b) \geq ABc + BCa + CAb$

(тут $\max(x, y)$ — найбільше серед чисел x, y , а $\min(x, y)$ — найменше серед них).

Журнал «У світі математики», №4, 2010 р.

406. Нехай $f(t) = \left[\frac{t+1}{2}\right] + \left[\frac{t+2}{2}\right] + \left[\frac{t+3}{2}\right]$, $t \in \mathbb{R}$ (тут $[a]$ — ціла частина числа a). Розглянемо множину точок (x, y) координатної площини, для яких $|x| \leq 100$, $|y| \leq 100$ та $f(x) + f(y)$ ділиться на 3. Знайти площу цієї множини.

Журнал «У світі математики», №2, 2011 р.

407. Нехай I_A — центр зовнівписаного кола трикутника ABC , яке дотикається до сторони BC і продовжень сторін AC та AB . Нехай P та Q — центри кіл, описаних навколо трикутників ABI_A та ACI_A відповідно. Доведіть, що точки B, C, P та Q лежать на одному колі.

Журнал «У світі математики», №2, 2011 р.

408. Знайти усі пари дійсних чисел (x, y) , які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} + \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}, \\ \sqrt{|x+2|} = 2-y. \end{cases}$$

Журнал «У світі математики», №3, 2011 р.

409. Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник. На його діагоналях AC та BD обрали точки X та Y відповідно так, що чотирикутник $ABXY$ є паралелограмом. Довести, що кола, описані навколо трикутників BXD та AYC , мають рівні радіуси.

Журнал «У світі математики», №3, 2011 р.

410. Многочлен

$$a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots + a_{n-k-1} x^{n-k-1} + a_{n-k} x^{n-k}$$

назвемо *універсальним*, якщо $a_i = a_{n-i}$ та $a_i \leq a_{i+1}$ для всіх $0 \leq k \leq i < \frac{n}{2}$, причому $a_k > 0$. Довести, що добуток довільних двох універсальних многочленів є універсальним многочленом.

Журнал «У світі математики», №4, 2011 р.

411. Для довільних дійсних чисел $0 \leq x, y, z \leq 1$ довести нерівність:

$$(x^4 + y^4 + z^4) + (x^5 + y^5 + z^5) + (x - y)^6 + (y - z)^6 + (z - x)^6 \leq 6.$$

Журнал «У світі математики», №4, 2011 р.

412. Нехай H — точка перетину висот AF та BE гострокутного трикутника ABC , M — середина сторони AB , а MP , MQ — діаметри кіл, описаних навколо трикутників AME і BMF відповідно. Довести, що точки P , H і Q лежать на одній прямій.

Журнал «У світі математики», №4, 2011 р.

413. Нехай BM — медіана рівнобедреного трикутника ABC ($AC = BC$). На цій медіані відмітили точку N так, що $\angle BAN = \angle CBM$. Довести, що бісектриса кута $\angle CNM$ перпендикулярна до прямої AN .

Журнал «У світі математики», №1, 2012 р.

414. Нехай H та O — ортоцентр та центр описаного кола гострокутного трикутника ABC відповідно. Відомо, що $AB < BC$, пряма BO перетинає пряму AC в точці P , а пряма, яка проходить через точку H і паралельна прямій BO , перетинає пряму AC в точці Q . Довести, що $OP = OQ$.

Журнал «У світі математики», №1, 2012 р.

415. Всередині трикутника ABC відмітили точки M і N так, що точка M лежить всередині трикутника ABN , а точка N лежить всередині трикутника ACM . Крім того, $\angle MAB = \angle NAC$, $\angle MBA = \angle NBC$ і $\angle MCB = \angle NCA$. Довести, що якщо точки B , M , N і C лежать на одному колі з центром W , то пряма AW ділить відрізок MN навпіл.

Журнал «У світі математики», №2, 2012 р.

416. Дано півколо з діаметром AB . На дузі AB цього півкола відмітили довільну точку C , відмінну від точок A і B . Нехай D — ортогональна проекція точки C на діаметр AB . Коло ω дотикається до відрізків AD , CD і дуги AB в точці P . Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів $\angle APB$ і $\angle ACD$ лежить на діаметрі AB .

Журнал «У світі математики», №2, 2012 р.

417. Нехай a , b та c — додатні дійсні числа. Довести, що:

$$\frac{1}{ab^2 + bc^2 + ca^2} + \frac{1}{3abc} \geq \frac{2}{a^2b + b^2c + c^2a}.$$

Журнал «У світі математики», №3, 2012 р.

418. Дано трикутник ABC . Точка M рухається по стороні BA , а точка N рухається по продовженню сторони AC за точку C так, що $BM = CN$. Довести, що центр кола, описаного навколо трикутника AMN , рухається по прямій лінії.

Журнал «У світі математики», №3, 2012 р.

419. Дано гострокутний трикутник ABC . Нехай ω — коло, яке перетинає сторону AB у точках C_1 , C_2 ($AC_1 < AC_2$), сторону BC у точках A_1 , A_2 ($BA_1 < BA_2$), сторону CA у точках B_1 , B_2 ($CB_1 < CB_2$). Довести, що ω можна вибрати так, щоб відрізки A_1B_1 , B_1C_2 і C_1A_2 були його діаметрами.

Журнал «У світі математики», №3, 2012 р.

420. Знайти всі натуральні n , для яких $3^n + 5^n + 7^n$ ділиться на $3^{n-1} + 5^{n-1} + 7^{n-1}$.

Журнал «У світі математики», №4, 2012 р.

421. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^5 - 10y^3 + 9z = 0, \\ y^5 - 10z^3 + 9x = 0, \\ z^5 - 10x^3 + 9y = 0. \end{cases}$$

Журнал «У світі математики», №4, 2012 р.

422. Дано трикутник ABC , в якому $AB > AC$. Через точку A провели дотичну до описаного кола трикутника ABC , яка перетинає пряму BC в точці P . На продовженні сторони BA за точку A відмітили точку Q так, що $AQ = AC$. Нехай X та Y — середини відрізків CQ і AP відповідно, а R належить відрізку AP , причому $AR = CP$. Довести, що $CR = 2XY$.

Журнал «У світі математики», №1, 2013 р.

423. У площині опуклого чотирикутника $ABCD$ розташована точка P . Нехай A_0 , B_0 , C_0 і D_0 — середини сторін AB , BC , CD і DA відповідно. На стороні AB обирають точку A_1 так, що промені PA_0 і PA_1 симетричні відносно бісектриси кута $\angle APB$. Аналогічним чином обирають точки B_1 , C_1 і D_1 на сторонах BC , CD і DA відповідно. Знайти всі такі точки

P , для яких чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є паралелограмом.

Журнал «У світі математики», №1, 2013 р.

424. Всередині трикутника ABC відмітили довільну точку M , а на відрізку AM відмітили довільну точку N . Прямі AB і AC вдруге перетинають описане коло трикутника BMC в точках E і F відповідно. Пряма EM вдруге перетинає описане коло трикутника NMC у точці P , а пряма FM вдруге перетинає описане коло трикутника NMB у точці Q . Доведіть, що описані кола трикутників EMF і PMQ дотикаються одне до одного.

Журнал «У світі математики», №2, 2013 р.

425. На стороні AC трикутника ABC взяли довільну точку E . На променях AB і CB відмітили точки N і M відповідно так, що $\angle AEN = \angle ABC = \angle CEM$. Промені AM і CN перетинаються в точці K . Довести, що прямі KE , які відповідають всім можливим положенням точки E , проходять через спільну точку.

Журнал «У світі математики», №3, 2013 р.

426. Нехай x та y — дійсні числа, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^4 + 2y^3 - x = -\frac{1}{4} + 3\sqrt{3}, \\ y^4 + 2x^3 - y = -\frac{1}{4} - 3\sqrt{3}, \end{cases}$$

Довести, що $2xy = x + y$.

Журнал «У світі математики», №3, 2013 р.

427. Для довільних $a, b, c > 0$ довести нерівність:

$$\frac{a}{b+c}(a^2+bc) + \frac{b}{c+a}(b^2+ca) + \frac{c}{a+b}(c^2+ab) \geq a^2+b^2+c^2.$$

Журнал «У світі математики», №4, 2013 р.

428. Знайти всі натуральні n такі, що $[\log_2 n] = [\log_3 n]$ (тут $[x]$ позначає цілу частину числа x).

Журнал «У світі математики», №4, 2013 р.

429. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ — додатні дійсні числа, $n \geq 2$. Довести, що:

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq 2n^2.$$

Журнал «У світі математики», №1, 2014 р.

430. Про дійсні числа a, b відомо, що $a^3 = 3ab^2 + 11$ та $b^3 = 3a^2b + 2$. Довести, що $a^2 + b^2 = 5$.

Журнал «У світі математики», №1, 2014 р.

431. Розв'язати рівняння: $(x - 1)^4 - x^3 = 17$.

Журнал «У світі математики», №2, 2014 р.

432. Пряма, паралельна стороні BC трикутника ABC , перетинає сторони AB і AC у точках P і Q відповідно. Всередині трикутника APQ відмітили довільну точку M . Позначимо через E та F точки перетину відрізків BM і CM з відрізком PQ відповідно. Нехай N — друга точка перетину описаних кіл трикутників PMF і QME . Довести, що точки A, M і N лежать на одній прямій.

Журнал «У світі математики», №2, 2014 р.

433. Послідовність дійсних чисел a_n , $n \geq 1$ є такою, що:

$$a_1 = 0 \quad (n + 1)a_{n+1} = n(a_n + 1), \quad n \geq 1.$$

Знайти всі такі номери n , для яких a_n — квадрат цілого числа.

Журнал «У світі математики», №3, 2014 р.

434. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа. Довести нерівність:

$$\frac{a^3}{4a + b + c} + \frac{b^3}{4b + c + a} + \frac{c^3}{4c + a + b} \geq \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Журнал «У світі математики», №3, 2014 р.

435. Нехай L — точка перетину діагоналей опуклого чотирикутника $ABCD$, в якому $AB = AC = BD$, P — друга точка перетину описаних кіл трикутників ABC та ALD , а Q — точка перетину прямих BC та AP . Довести, що LQ — бісектриса кута $\angle CLD$.

Журнал «У світі математики», №3, 2014 р.

436. Нехай x, y, z — такі додатні дійсні числа, що: $x + y + z = 1$. Довести, що:

$$(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) \leq 27x^2y^2z^2.$$

Журнал «У світі математики», №4, 2014 р.

437. Нехай $n > 1$ — натуральне число. Всередині трикутника ABC обрали точку A_1 так, що $\angle BAA_1 = \frac{1}{n}\angle ABC$ та $\angle ACA_1 = \frac{1}{n}\angle ACB$. Точки B_1 та C_1 визначаються аналогічним чином. Довести, що прямі AA_1, BB_1 та CC_1 перетинаються в одній точці.

Журнал «У світі математики», №1, 2015 р.

438. Довести, що для будь-яких x та y :

$$(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) \geq 2(x + y)(x - 1)(y - 1).$$

При яких значеннях x та y досягається рівність?

Журнал «У світі математики», №4, 2015 р.

Задачі, опубліковані в журналі «Математика в школе»

439. Обчислити:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}.$$

Журнал «Математика в школе», №5, 1980 р.

440. Довести, що якщо функція f за будь-яких $x \in \mathbb{R}$ задовольняє рівність: $f(x + \alpha) = f(x) + \beta$ (α, β — фіксовані числа, $\alpha \neq 0$), то f є сумою періодичної та лінійної функцій.

Журнал «Математика в школе», №2, 1984 р.

441. Розв'язати рівняння:

$$2 \log_3 \operatorname{ctg} x = \log_2 \cos x.$$

Журнал «Математика в школе», №5, 1984 р.

442. Знайти натуральне число, що є повним кубом і запис якого складається з однієї одиниці, двох двійок, трьох трійок і т.д. до дев'яти.

Журнал «Математика в школе», №6, 1984 р.

443. На площині відмічено три вершини квадрата і дозволяється застосовувати центральні симетрії відносно взятих точок і точок, побудованих при застосуванні цих симетрій. Чи можна такими побудовами отримати четверту вершину квадрата?

Журнал «Математика в школе», №5, 1985 р.

444. В рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено бісектрису CD . Пряма, перпендикулярна CD , що проходить через точку D , перетинає AC в точці E . Знайти EC , якщо $AD = 1$.

Журнал «Математика в школе», №6, 1985 р.

445. Знайти всі натуральні числа, п'ятий степінь яких є шестизначним числом, що закінчується на 4.

Журнал «Математика в школі», №6, 1986 р.

446. Нехай $a_k > 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$, причому $\sum_{k=1}^n a_k \geq 2\sqrt{n}$ при $n = 1, 2, 3, \dots$. Довести, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність:

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Журнал «Математика в школі», №3, 2004 р.

447. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівність:

$$f(xf(x) + f(y)) = x^2 + y.$$

Журнал «Математика в школі», №9, 2004 р.

448. На площині відмічено вершини опуклого n -кутника ($n \geq 4$). Жодні чотири з них не лежать на одному колі. Трикутник з вершинами в будь-яких з відмічених точок назовемо «товстим», якщо його описаний круг містить інші $(n - 3)$ відмічені точки. А також «худим», якщо його описаний круг не містить жодної з відмічених точок. Довести, що «товстих» і «худих» трикутників однакова кількість.

Журнал «Математика в школі», №10, 2004 р.

449. На площині відмітили 2005 точок, ніякі три з яких не лежать на одній прямій, і через всі пари відмічених точок провели прямі. Довести, що деякі з відмічених точок можна зафарбувати червоним кольором, а інші — синім так, щоб будь-який відрізок з однаково зафарбованими кінцями перетинав парну кількість проведених прямих.

Журнал «Математика в школі», №7, 2005 р.

450. На стороні BC гострокутного трикутника ABC відмічено точку D , відмінну від B і C . Довести, що точка A лежить на колі, проведеному через центри описаних кіл трикутників ABD , ACD і ABC .

Журнал «Математика в школі», №4, 2007 р.

451. Дано трикутник ABC . На його стороні AC вибирають точку P , а на променях AB і CB — точки N і M відповідно, для яких $\angle APN = \angle ABC = \angle CPM$. Нехай Q — точка перетину прямих AM і CN . Довести, що всі прямі PQ проходять через фіксовану точку.

Журнал «Математика в школі», №6, 2008 р.

452. Два кола, з радіусами r_1 і r_2 мають спільну хорду AB і дотикаються з колом ω внутрішнім чином. Знайти радіус кола ω , якщо відомо, що його центр лежить на прямій, що проходить через точку A перпендикулярно AB .

Журнал «Математика в школі», №2, 2009 р.

453. В трикутнику ABC проведено медіану AD . Відомо, що $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$. Знайти $\angle ABC$.

Журнал «Математика в школі», №7, 2009 р.

454. Дано гострокутний трикутник ABC , в якому проведено висоти AP та BQ . Побудуйте на стороні AB точку M , для якої $\angle AQM = \angle BPM$.

Журнал «Математика в школі», №1, 2011 р.

455. На продовженні бісектриси кута C трикутника ABC за точку C вибрано точку D , для якої $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ACB$. Знайдіть довжину відрізка CD , якщо $BC = a$ і $AC = b$.

Журнал «Математика в школі», №5, 2012 р.

456. Вписане коло трикутника ABC дотикається його сторін AB , BC і CA в точках C_1 , A_1 і B_1 відповідно. Доведіть, що якщо $\angle CC_1B_1 = \angle AA_1B_1$, то трикутник ABC — рівнобедрений.

Журнал «Математика в школі», №1, 2013 р.

457. Цілі числа a, b, c, d задовольняють рівностям: $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = 888\,888$. Доведіть, що число

$$2(a+b)(c+d)(ac+bd-888\,888)$$

є повним квадратом цілого числа.

Журнал «Математика в школі», №2, 2013 р.

458. Числова послідовність (x_n) , $n \geq 1$ задана умовами:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \quad x_n = \frac{x_{n-1}^2 + x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-2}^2}{x_{n-3}} \quad n \geq 4.$$

Доведіть, що всі члени цієї послідовності є цілими числами.

Журнал «Математика в школі», №6, 2013 р.

459. Доведіть, що якщо a, b, c, d — натуральні числа і $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$, то:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1 - \frac{1}{(a+c)^3}.$$

Журнал «Математика в школі», №9, 2013 р.

460. Нехай точка M — середина бісектриси AD гострокутного трикутника ABC . Коло з діаметром AC перетинає відрізок BM в точці E , а коло з діаметром AB перетинає відрізок CM в точці F . Доведіть, що точки B , E , F і C лежать на одному колі.

Журнал «Математика в школі», №2, 2014 р.

461. В коло ω вписано гострокутний нерівнобедрений трикутник ABC . Нехай P ($P \neq B$) — точка перетину бісектриси кута ABC з ω , а Q — точка на ω , діаметрально протилежна точці P . Пряма, проведена через Q паралельно BC , перетинає ω в точці S ($S \neq Q$). Доведіть, що пряма AS паралельна прямій, що проходить через середини відрізків AC і HP , де H — ортоцентр трикутника ABC .

Журнал «Математика в школі», №7, 2014 р.

Вибрані задачі В. А. Ясінського

462. Розглянемо всі перестановки натуральних чисел від 1 до 100. Перестановка називається *подвійною*, коли вона володіє такою властивістю: якщо написати цю перестановку двічі в рядок, то викресленням деяких 100 чисел з неї можна отримати перестановку 1, 2, 3, ..., 100. Скільки існує подвійних перестановок?

Олімпіада 239 школи м. Санкт-Петербург, 10–11 класи, 2013 р.

463. Про дійсні невід'ємні числа a , b , c відомо, що $a + b + c \leq 2$. Доведіть, що

$$\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab} \leq 3.$$

Олімпіада 239 школи м. Санкт-Петербург, 10–11 класи, 2013 р.

464. Нехай a , b , c — додатні дійсні числа, для яких $a + b + c = 3$. Доведіть, що

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + 3 \leq 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right).$$

Олімпіада 239 школи м. Санкт-Петербург, 8–9 класи, 2014 р.

465. Всередині трикутника ABC задане коло. Із точки A до цього кола провели дві дотичні, які перетинають сторону BC в точках A_1 і A_2 . Точки B_1 , B_2 , C_1 , C_2 визначаються аналогічно. Відомо, що п'ять із цих шести точок лежать на одному колі. Доведіть, що і шоста точка також

лежить на цьому колі.

Олімпіада 239 школи м. Санкт-Петербург, 10–11 класи, 2014 р.

466. Про гострокутний трикутник ABC відомо, що AM і CN — його висоти, а всередині трикутника існує така точка X , що $MBNX$ — паралелограм. Нехай Y — це точка перетину прямих AC і MN . Доведіть перпендикулярність прямих, що містять бісектриси кутів MXN і MYC .

467. Знайти усі впорядковані пари (x, y) цілих додатних чисел таких, що для будь-якого цілого додатного n числа $n(x! - xy - x - y + 2) + 2$ та $n(x! - xy - x - y + 3) + 3$ мають спільний дільник, більший за 1.

468. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точки E і F обрано на сторонах BC і AB відповідно. Нехай O — точка перетину відрізків AE і CF . Відомо, що в чотирикутники $OFBE$ та $OADC$ можна вписати кола. Доведіть, що

а) в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло;

б) кола, вписані в трикутники ACD і ABC , дотикаються одне до одного.

469. У площині опуклого чотирикутника $ABCD$ розташована точка P . Нехай A_0, B_0, C_0 і D_0 — середини сторін AB, BC, CD і DA відповідно. На стороні AB обирається точка A_1 так, що промені PA_0 і PA_1 симетричні відносно бісектриси кута APB . Аналогічним чином обираються точки B_1, C_1 і D_1 на сторонах BC, CD і DA відповідно. Знайдіть всі такі точки P , для яких чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — паралелограм.

470. Знайти всі такі пари додатних раціональних чисел (x, y) , що числа $\{x\} + \left\{\frac{1}{y}\right\}$ та $\{y\} + \left\{\frac{1}{x}\right\}$ будуть цілими. (Тут $\{x\} = x - [x]$, а $[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x .)

471. Коло з центром O дотикається до всіх сторін опуклого чотирикутника $ABCD$. Промені BA і CD перетинаються в точці K , а промені AD і BC перетинаються в точці L . Точки X і Y належать відрізкам OA і OC відповідно так, що $\angle XKY = \frac{1}{2}\angle AKC$. Доведіть, що $\angle XLY = \frac{1}{2}\angle ALC$.

472. Довести, що для кожного натурального $n \geq 2$ існує таке натуральне число x , що число $x^5 + 24$ ділиться на 5^n і не ділиться на 5^{n+1} .

473. Знайдіть всі дійсні розв'язки рівняння

$$1 + 3\sqrt{3} \cdot 12^x = 3\sqrt{3} \cdot 27^x - 64^x.$$

474. Нехай x та y — дійсні числа, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^4 + 2y^3 - x = -\frac{1}{4} + 3\sqrt{3}, \\ y^4 + 2x^3 - y = -\frac{1}{4} - 3\sqrt{3}. \end{cases}$$

Доведіть, що $2xy = x + y$.

475. Нехай I_A — центр зовнівписаного кола трикутника ABC , яке дотикається до сторони BC і до продовжень сторін AB та AC за точки B та C відповідно. Нехай P та Q — центри кіл, описаних навколо трикутників ABI_A та ACI_A відповідно. Доведіть, що точки B, C, P та Q лежать на одному колі.

476. Нехай a, b і c — додатні дійсні числа. Доведіть, що

$$\frac{1}{ab^2 + bc^2 + ca^2} + \frac{1}{3abc} \geq \frac{2}{a^2b + b^2c + c^2a}.$$

477. Нехай n — натуральне число, $n > 3$. Про невід'ємні дійсні числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ відомо, що $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2$.

а) Доведіть нерівність

$$x_1 f(x_2) + x_2 f(x_3) + \dots + x_n f(x_1) \leq \frac{1}{2},$$

де $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $0 \leq x \leq 2$.

б) Для яких чисел досягається знак рівності у цій нерівності?

478. Дано півколо з діаметром AB . На дузі AB цього півкола довільно відмітили точку C , відмінну від точок A і B . Нехай D — ортогональна проекція точки C на діаметр AB . Коло ω дотикається до відрізків AD , CD і дуги AB півкола в точці P . Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів APB і ACD лежить на діаметрі AB .

479. Знайдіть найменше натуральне n таке, що число $5^n - 1$ ділиться на 2^{2009} .

480. Нехай a, b і c — довільні дійсні числа. Доведіть нерівність:

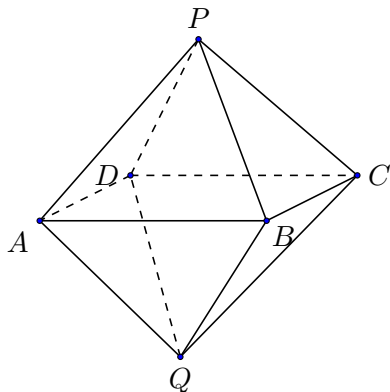
а) $(a^4 + b^4 + c^4)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a^3 + b^3 + c^3)^2$;

б) $(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq (a^4 + b^4 + c^4)(ab + bc + ca)$.

481. Знайдіть всі трійки дійсних чисел (x, y, z) , які задовольняють кожному із трьох рівностей $xy = \frac{z}{x} + 1$, $yz = \frac{x}{y} + 1$ і $zx = \frac{y}{z} + 1$.

482. Карлсон задумав три попарно різних додатних числа, а Малюк — два різних додатних числа. З'ясувалося, що сума квадратів усіх чисел Карлсона співпадає із сумою квадратів усіх чисел Малюка, а сума четвертих степенів усіх чисел Карлсона співпадає із сумою четвертих степенів усіх чисел Малюка. Доведіть, що обидва числа Малюка лежать між найбільшим та середнім за величиною числом Карлсона.

483. Многогранник $PABCDQ$ має вигляд, зображений на малюнку. Відомо, що $ABCD$ — паралелограм, площини трикутників PAC і PBD взаємно перпендикулярні, а також взаємно перпендикулярними є площини трикутників QAC і QBD . Кожну грань цього многогранника пофарбували в чорний або білий колір так, що грані, які мають спільне ребро пофарбовані в різні кольори. Доведіть, що сума квадратів площ чорних граней дорівнює сумі квадратів площ білих граней.



484. Доведіть, що для будь-яких додатних a , b і c виконується нерівність

$$\sqrt[3]{\frac{9a(a+b)}{16(a+b+c)^2}} + \sqrt[3]{\frac{3bc}{4(a+b)(a+b+c)}} \leq 1.$$

485. Нехай p і $p+2$ — прості числа. Доведіть, що число $2p(p+1)(p+2)$ є спільним дільником таких чисел $p^{p+2} - p$ та $(p+2)^p - p - 2$.

486. Нехай x та y — такі дійсні числа, що $4x^2 - 3xy + 2y^2 \leq 1,5$. Доведіть, що $2xy + 7 \geq 4x + 6y$.

487. Нехай a , b , c і d — натуральні числа такі, що

а) $a > b > c > d$,

б) $(a-d)(b-c) = ad + bc$.

Доведіть, що $a \geq \frac{5+2\sqrt{3}}{13}(b+c+d)$.

488. Нехай x_1 , x_2 , x_3 і x_4 — дійсні числа, які належать проміжку $[1; +\infty)$. Доведіть, що серед цих чисел знайдуться такі два числа x_i та

x_j ($1 \leq i \neq j \leq 4$), для яких виконується нерівність

$$\frac{\sqrt{(x_i^2 - 1)(x_j^2 - 1)} + 1}{x_i x_j} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

489. Нехай x і y додатні числа, для яких виконується нерівність $3(x + y) \geq 2(xy + 1)$. Доведіть, що виконується і така нерівність

$$9(x^3 + y^3) \geq x^3 y^3 + 1.$$

490. Нехай x та y — будь-які дійсні числа. Доведіть, що

$$(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) \geq 2(x + y)(x - 1)(y - 1).$$

При яких значеннях x та y досягається знак рівності?

491. Нехай N — кількість способів розрізати правильний 2007-кутник $A_1 A_2 \dots A_{2007}$ на трикутники по його діагоналях.

- а) Чи буде число N — парним?
- б) Чи буде число N ділитися на 3?
- в) Чи буде число N ділитися на 6?

492. Знайти всі можливі графи, кожний із яких має $n \leq 9$ вершин і володіє такою властивістю: в його вершинах можна записати додатні числа так, що кожне число дорівнює половині суми чисел, які з ним сусідні. (Два числа називаються сусідніми, якщо вони записані у вершинах графа, що з'єднані ребром.)

493. В ряд виписано декілька нулів та одиниць. Такий запис будемо називати *впорядкованим набором із нулів та одиниць*. Нехай A — кількість пар виду $\dots 1 \dots 0 \dots$ таких, що нуль цієї пари стоїть на парному місці після одиниці цієї пари, а B — таких, що нуль стоїть на непарному місці. Наприклад, для 10 маємо $A = 0$, $B = 1$, для 100 маємо $A = 1$, $B = 1$, а для 01010010110 маємо $A = 6$, $B = 7$.

а) Доведіть, що для будь-якого впорядкованого набору із нулів та одиниць буде виконуватися нерівність $A \leq B$.

б) Чи існує такий впорядкований набір із нулів та одиниць, для якого $B - A = 2007$?

494. Прямокутник $MNKL$ з цілими сторонами розділили на одиничні квадрати. Деякі сторони одиничних квадратів пофарбували в білий колір. Через $n(X, Y)$ позначимо кількість способів дістатися з вершини X у вершину Y , рухаючись лише по не зафарбованих сторонах клітинок у

напрямках зліва — направо та знизу — вгору. Нехай A, B, C і D — точки, що лежать на сторонах MN, NK, KL і LM відповідно. Доведіть, що

$$n(A, B) \cdot n(D, C) \geq n(A, C) \cdot n(D, B).$$

495. Про трикутну піраміду $SABC$ відомо, що $\angle BSC = \alpha$, $\angle CSA = \beta$, $\angle ASB = \gamma$, а двогранні кути при ребрах SA і SB мають величину φ і δ відповідно. Доведіть, що $\gamma > \alpha \cdot \cos \delta + \beta \cdot \cos \varphi$.

496. Нехай a, b і c — додатні числа, причому $a + b + c = 1$. Доведіть, що

$$\frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \leq \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}.$$

497. Розглянемо такі дві нескінченні множини дійсних чисел $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ та $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$, що $x_1 = y_1$ і для будь-якого натурального n виконується рівність $y_{n+1} = x_{n+1} + y_n - 2x_{n+1}y_n$. Доведіть, що $\frac{1}{2} \in X$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{1}{2} \in Y$.

498. Дано гострокутний трикутник ABC . Нехай ω — коло, яке перетинає сторону AB в точках C_1 і C_2 (C_1 лежить між A та C_2), сторону BC в точках A_1 і A_2 (B_1 лежить між B та A_2), сторону CA в точках B_1 і B_2 (B_1 лежить між C і B_2). Довести, що ω можна вибрати так, щоб відрізки A_1B_2, B_1C_2 і C_1A_2 були його діаметрами.

499. Дано граф-дерево з n вершинами, ($n \geq 3$). Одну з вершин обираємо за корінь дерева, а саме дерево орієнтуємо від кореня до листя. Для такої орієнтації графа в кожній його вершині запишемо кількість нащадків цієї вершини. Довести, що серед записаних чисел кількість парних не менша за кількість непарних.

500. Натуральні числа від 1 до n^2 виписали в рядок у деякому порядку ($n \geq 3$). За один хід дозволяється робити наступні перетворення: даний рядок $\dots, a, b, c, \dots$ можна замінити на рядок $\dots, b, a, c, \dots$, якщо c лежить між a та b , а також можна замінити на рядок $\dots, a, c, b, \dots$, якщо a лежить між b та c (в кожному випадку міняють місцями лише два числа). Два рядки назвемо *еквівалентними*, якщо один із них можна перетворити в другий за допомогою вказаних перетворень. Довести, що існує принаймні $\frac{n^4 - 2n^3}{2}$ попарно нееквівалентних рядочків.

Вибрані публікації

В. А. Ясінського

В'ячеслав Ясінський

Реверсна техніка розв'язування олімпіадних задач із математики¹

Не то чудо из чудес,
что упал мужик с небес,
а то чудо из чудес,
как же он туда залез!

На олімпіадах для школярів з математики часто пропонують задачі на доведення, розв'язування яких вимагає від них виявити свої здібності і можливості, ступінь інтелектуального розвитку. Ця стаття має за мету ознайомити таких учнів та їхніх наставників із сучасним методом доведення, в якому використовується поняття *реверсу*.

Реверс (англ. reverse, від лат. Revertor — повертаю назад, повертаюся) (реверсивний механізм) використовується для зміни напрямку руху автомобіля.

Реверсна техніка Коші для доведення нерівностей

У цьому розділі для доведення нерівностей ми будемо використовувати метод, який називається *реверсною технікою Коші*, який дає змогу застосувати нерівність Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним. Цей метод є несподівано простим, але досить

¹Науково-методичний журнал «Математика в рідній школі», 2014, №12. — С. 44–49.

ефективним у застосуванні. Його суть будемо розкривати під час доведення олімпіадних алгебраїчних нерівностей.

Приклад 1.1. Нехай a , b , c — додатні дійсні числа, сума яких дорівнює 3. Доведіть, що

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{2}.$$

(Болгарія, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2003 р.)

Розв’язання. Насправді неможливо використовувати нерівність Коші у знаменниках лівої частини ($b^2 + 1 \geq 2b$ та ін.), оскільки одержимо знак нерівності, протилежний до потрібного. Тим не менше, ми зможемо здійснити задумане, але до іншого виразу:

$$\frac{a}{b^2 + 1} = a - \frac{ab^2}{b^2 + 1} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{1}{2}ab.$$

Тепер нерівність матиме такий вигляд:

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq (a + b + c) - \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \geq \frac{3}{2},$$

бо $a + b + c = 3$ і $ab + bc + ca \leq 3$.

Дійсно,

$$9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca),$$

тобто $ab + bc + ca \leq 3$. □

Проаналізуємо це розв’язання. *Реверсом* у ньому є перехід від виразу $\frac{a}{b^2+1}$ до виразу $-\frac{ab^2}{b^2+1}$. Дійсно, якщо у знаменнику застосувати нерівність Коші, то одержимо нерівність

$$\frac{a}{b^2 + 1} \leq \frac{a}{2b}.$$

При цьому знак нерівності є протилежним до знаку, який потрібно довести. Здійснивши перехід до виразу $-\frac{ab^2}{b^2+1}$ і застосувавши у його знаменнику нерівність Коші, одержимо нерівність

$$-\frac{ab^2}{b^2 + 1} \geq -\frac{ab^2}{2b},$$

у якій вже потрібний знак нерівності.

Далі, на конкретних прикладах, ми продемонструємо реверсну техніку Коші.

Приклад 1.2. Нехай a, b, c, d — додатні дійсні числа, сума яких дорівнює 4. Доведіть, що

$$\frac{a}{b^2c+1} + \frac{b}{c^2d+1} + \frac{c}{d^2a+1} + \frac{d}{a^2b+1} \geq 2.$$

(В'єтнам, 2003 р.)

Розв'язання. Застосуємо реверсну техніку Коші:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^2c+1} &= a - \frac{ab^2c}{b^2c+1} \geq a - \frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}} = a - \frac{ab\sqrt{c}}{2} = \\ &= a - \frac{b\sqrt{a \cdot ac}}{2} \geq a - \frac{b(a+ac)}{4} = a - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{4}abc. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^2c+1} + \frac{b}{c^2d+1} + \frac{c}{d^2a+1} + \frac{d}{a^2b+1} &\geq \\ &\geq (a+b+c+d) - \frac{1}{4}(ab+bc+cd+da) - \frac{1}{4}(abc+bcd+cda+dab). \end{aligned}$$

Оскільки $a+b+c+d=4$, то

$$\begin{aligned} ab+bc+cd+da &= b(a+c) + d(c+a) = (a+c)(b+d) \leq \\ &\leq \left(\frac{(a+c) + (b+d)}{2} \right)^2 = \left(\frac{a+b+c+d}{2} \right)^2 = \left(\frac{4}{2} \right)^2 = 4, \end{aligned}$$

а також

$$\begin{aligned} abc+bcd+cda+dab &= bc(a+d) + da(c+b) \leq \\ &\leq \left(\frac{b+c}{2} \right)^2 (a+d) + \left(\frac{a+d}{2} \right)^2 (b+c) = \\ &= \frac{1}{4} (a+d)(b+c)(a+b+c+d) = (a+d)(b+c) \leq \\ &\leq \left(\frac{(a+d) + (b+c)}{2} \right)^2 = \left(\frac{a+b+c+d}{2} \right)^2 = \left(\frac{4}{2} \right)^2 = 4. \end{aligned}$$

Таким чином, ми довели, що

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^2c+1} + \frac{b}{c^2d+1} + \frac{c}{d^2a+1} + \frac{d}{a^2b+1} &\geq \\ &\geq (a+b+c+d) - \frac{1}{4}(ab+bc+cd+da) - \frac{1}{4}(abc+bcd+cda+dab) \geq \end{aligned}$$

$$\geq 4 - \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 2,$$

що і треба було довести. $\square$

Зауваження. Зверніть увагу, що заміну заданого виразу на реверсний ми здійснили двічі.

Приклад 1.3. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа. Доведіть, що

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{a + b + c}{2}.$$

(Румунія, 2007 р.)

Розв'язання. Скористаємося наступною оцінкою для застосування реверсної техніки Коші:

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2ab} = a - \frac{1}{2}b.$$

Таким чином,

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq (a + b + c) - \frac{1}{2}(b + c + a) = \frac{a + b + c}{2},$$

що і треба було довести. $\square$

Приклад 1.4. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, сума яких дорівнює 3. Доведіть, що

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq 1.$$

(Польща, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2005 р.)

Розв'язання. Скористаємося наступною оцінкою для застосування реверсної техніки Коші:

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a + 2b^2} \geq a - \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^2b^2}} = a - \frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2b^2}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} &\geq (a + b + c) - \frac{2}{3} \left(\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{c^2a^2} \right) = \\ &= 3 - \frac{2}{3} \left(\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{c^2a^2} \right) \geq 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 1. \end{aligned}$$

Залишилося довести, що $\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{c^2a^2} \leq 3$.

Дійсно, оскільки $a + b + c = 3$, то

$$9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca),$$

тобто $3 \geq ab + bc + ca$.

Далі,

$$\begin{aligned} 9 &= 3(a + b + c) = 2(a + b + c) + 3 \geq 2(a + b + c) + (ab + bc + ca) = \\ &= (a + b + ab) + (b + c + bc) + (c + a + ca) \geq \\ &\geq 3\sqrt[3]{a \cdot b \cdot ab} + 3\sqrt[3]{b \cdot c \cdot bc} + 3\sqrt[3]{c \cdot a \cdot ca} = \\ &= 3 \left(\sqrt[3]{a^2 b^2} + \sqrt[3]{b^2 c^2} + \sqrt[3]{c^2 a^2} \right), \end{aligned}$$

тобто $\sqrt[3]{a^2 b^2} + \sqrt[3]{b^2 c^2} + \sqrt[3]{c^2 a^2} \leq 3$, що і треба було довести. $\square$

Приклад 1.5. Нехай a, b, c, d — додатні дійсні числа, сума яких дорівнює 1. Доведіть, що

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(Ірландія, 1999 р.)

Розв'язання. Скористаємося наступною оцінкою для застосування реверсної техніки Коші:

$$\frac{a^2}{a+b} = a - \frac{ab}{a+b} \geq a - \frac{ab}{2\sqrt{ab}} = a - \frac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \\ &\geq (a + b + c + d) - \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}) \geq 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Залишилося довести, що $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da} \leq 1$.

Дійсно, оскільки $a + b + c + d = 1$, то за нерівністю Коші одержуємо:

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da} &\leq \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+d}{2} + \frac{d+a}{2} = \\ &= a + b + c + d = 1, \end{aligned}$$

що і треба було довести. $\square$

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.6. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, сума яких дорівнює 3. Доведіть, що

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3.$$

Вказівка. Скористайтесь оцінкою:

$$\frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geq a+1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a+1 - \frac{1}{2}(ab+b).$$

Задача 1.7. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, сума яких дорівнює 3. Доведіть, що $\frac{1}{1+2b^2c} + \frac{1}{1+2c^2a} + \frac{1}{1+2a^2b} \geq 1$.

Вказівка. Скористайтесь оцінками:

$$\frac{1}{1+2b^2c} = 1 - \frac{2b^2c}{1+2b^2c} \geq 1 - \frac{2b^2c}{3\sqrt[3]{b^4c^2}} = 1 - \frac{2}{3}\sqrt[3]{b^2c} \geq 1 - \frac{2}{9}(2b+c).$$

Задача 1.8. Нехай a, b, c, d — невід'ємні дійсні числа, сума яких дорівнює 4. Доведіть, що

$$\frac{1+ab}{1+b^2c^2} + \frac{1+bc}{1+c^2d^2} + \frac{1+cd}{1+d^2a^2} + \frac{1+ad}{1+a^2b^2} \geq 4.$$

Вказівка. Скористайтесь оцінкою:

$$\frac{1+ab}{1+b^2c^2} = (1+ab) - \frac{(1+ab)b^2c^2}{1+b^2c^2} \geq 1+ab - \frac{(1+ab)b^2c^2}{2bc} = 1+ab - \frac{1}{2}(1+ab)bc.$$

Задача 1.9. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, сума квадратів яких дорівнює 3. Доведіть, що $\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geq 1$.

Вказівка. Скористайтесь оцінкою:

$$\frac{1}{a^3+2} = \frac{1}{2} - \frac{a^3}{2(a^3+2)} = \frac{1}{2} - \frac{a^3}{2(a^3+1+1)} \geq \frac{1}{2} - \frac{a^3}{6\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}a^2.$$

Реверсна техніка розв'язування олімпіадних задач з геометрії

У цьому розділі для розв'язування олімпіадних задач із геометрії ми будемо використовувати *реверсну техніку їх розв'язування*. Суть цієї техніки полягає в тому, що замість одного із фактів, що задається умовою задачі, ми будемо доводити інший — реверсний до нього факт, після доведення якого отримаємо потрібний результат. Зрозуміло, що потрібно буде показати виконання того факту, що був нами

проігнорований. Детальніше, суть реверсної техніки будемо розкривати під час розв'язування олімпіадних задач із планіметрії.

Приклад 2.1. Два кола з центрами в точках O_1 і O_2 дотикаються зовні у точці T . Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло (O_1) так, що промені DA і CB дотикаються до кола (O_2) у точках E і F відповідно. Бісектриса кута ABF перетинає відрізок EF у точці N , а пряма FT перетинає дугу AT кола (O_1) , яка не містить точку B , у точці M , яка не співпадає з точкою A . Доведіть, що точка M є центром описаного кола трикутника BCN .

(Китай, математична олімпіада для дівчат, 2013 р.)

Розв'язання. Накреслимо малюнок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати її, спираючись на нього (рис. 1).

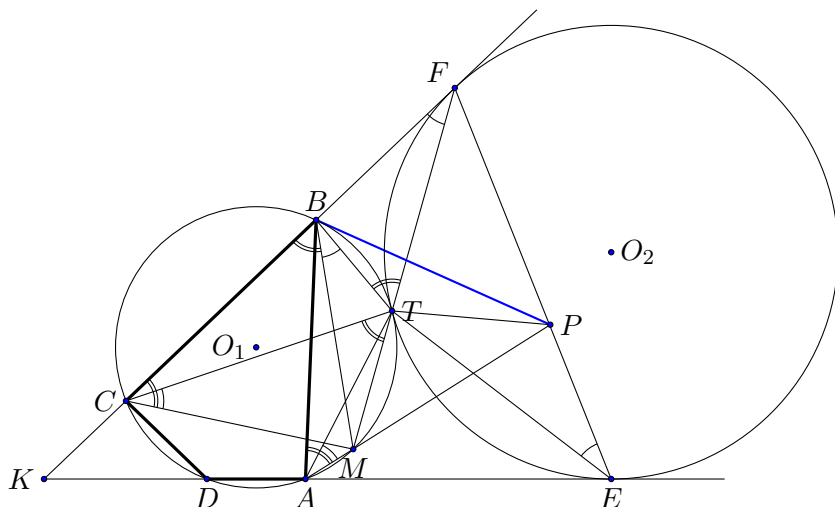


Рис. 1

Для розв'язання цієї задачі, застосуємо реверсний метод: нехай P — точка перетину AM і EF . Доведемо, що M — центр описаного кола трикутника BCP і що BP — бісектриса кута ABF , тобто, що точка P співпадає з точкою N .

Дійсно, оскільки T — точка дотику кіл (O_1) і (O_2) , то пряма O_1O_2 проходить через точку T . Крім того, пряма MF також проходить через точку T . Тому трикутники MO_1T і FO_2T — подібні рівнобедрені трикутники. Звідси випливає, що $\angle MO_1T = \angle FO_2T$. Тому, за властивістю вписаних кутів і теоремою про кут між дотичною і хордою,

що проведена в точку дотику, одержуємо:

$$\angle FET = \angle TFK = \frac{1}{2}\angle FO_2T = \frac{1}{2}\angle MO_1T = \angle TBM = \angle TCM = \angle TAM.$$

Далі, оскільки $\angle MBT = \angle MFB$, то $\triangle MBT \sim \triangle MFB$ (за двома кутами). Звідси випливає, що їх відповідні зовнішні кути рівні, а сторони пропорційні: $\angle CBM = \angle FTV$ і $MB^2 = MT \cdot MF$. А за властивістю вписаних кутів, одержуємо: $\angle CTM = \angle BCM$. Звідси випливає, що $\angle MBC = \angle MCB$, тобто $MC = MB$. Оскільки $\angle TAP = \angle TEP$, то точки A, T, P, E — циклічні. Звідки, за властивістю вписаних кутів і кута між дотичною і січною, одержуємо:

$$\angle MPT = \angle APT = \angle AET = \angle EFT,$$

тобто $\angle MPT = \angle MFP$. А це означає, що $\triangle MPT \sim \triangle MFT$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що $MP^2 = MT \cdot MF = MB^2$, тобто $MP = MB = MC$. Це означає, що M — центр описаного кола трикутника BCP . Залишилося довести, що BP — бісектриса кута ABF . Дійсно,

$$\begin{aligned} \angle ABP &= \angle ABM + \angle MBP = \angle ABM + \frac{180^\circ - \angle BMP}{2} = \\ &= \angle ABM + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCA = \\ &= \angle ABM + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCM - \frac{1}{2}\angle ACM = \\ &= \frac{1}{2}\angle CMB + \frac{1}{2}\angle BCM + \frac{1}{2}\angle ACM = \\ &= \frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{1}{2}\angle ABF, \end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Приклад 2.2. Нехай AD і AH — відповідно бісектриса і висота трикутника ABC , в якому $AB < AC$. Серединний перпендикуляр до відрізка AD перетинає півкола з діаметрами AB і AC , які розташовані зовні трикутника ABC , відповідно у точках X та Y . Доведіть, що чотирикутник $XYDH$ — вписаний.

(Іран, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 2).

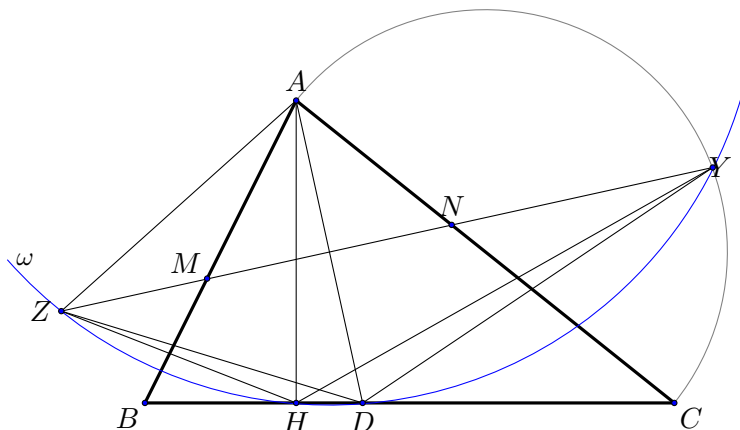


Рис. 2

Для розв'язання цієї задачі застосуємо реверсний метод: нехай серединний перпендикуляр до відрізка AD перетинає сторони AB і AC відповідно в точках M і N , а описане коло ω трикутника YDH — у двох різних точках Y і Z . Доведемо, що точка Z співпадає з точкою X .

Так як точка Y належить півколу з діаметром AC , то $\angle AYC = 90^\circ$. Тому, $\angle AYC = \angle AHC = 90^\circ$, а це означає, що чотирикутник $AHCY$ — вписаний. За властивістю симетричних і вписаних кутів, одержуємо:

$$\angle AZY = \angle DZY = \angle DHY = \angle CAH.$$

Але

$$\begin{aligned} \angle ZAB &= \angle AMN - \angle AZM = \angle ANM - \angle YAN = \angle AYZ = \angle DYZ = \\ &= \angle ZHB, \end{aligned}$$

тобто $\angle ZAB = \angle ZHB$. А це означає, що чотирикутник $AZBH$ — вписаний. Звідки одержуємо, що $\angle AZB = 180^\circ - \angle AHB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Так як кут AZB — прямий, то точка Z лежить на півколі з діаметром AB . Оскільки точка Z ще й належить серединному перпендикулярові відрізка AD , то ця точка належить їх перетину, тобто точка Z співпадає з точкою X , тобто чотирикутник $XYDH$ — вписаний в коло ω , що і треба було довести. $\square$

Приклад 2.3. Нехай ABC — гострокутний трикутник, вписаний в коло ω . Бісектриса кута BAC перетинає коло ω у точці M . На відрізьку

AM всередині трикутника ABC довільно відмітили точку P . Прямі, що проходять через точку P паралельно прямим AB і AC перетинають сторону BC у точках E і F відповідно. Прямі ME і MF перетинають вдруге коло ω у точках K і L відповідно. Доведіть, що прямі AM , BL і CK перетинаються в одній точці.

(Індонезія, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 3).

Для розв'язання цієї задачі застосуємо реверсний метод: нехай прямі ME і MF перетинають сторони AB і AC у точках U і V відповідно, а пряма UV перетинає пряму AM у точці D . Доведемо, що прямі BL і CK проходять через точку D .

Трикутники PEF і AUV — гомотетичні з центром у точці M . Дійсно, розглянемо гомотетію з центром M , яка відображає точку P в точку A . Нехай при цій гомотетії точки E і F відображаються в точки E' і F' відповідно. Тоді точка E' лежить на промені ME , причому $PE \parallel AE'$, тобто точка E' співпадає з точкою U . Аналогічно, точка F' співпадає з точкою V . Звідси випливає, що $UV \parallel EF$, тобто $UV \parallel BC$, бо при гомотетії прямі відображаються у паралельні прямі. Далі, так як AM — бісектриса кута BAC , то M — середина дуги BC кола ω . Звідси випливає, що $\angle MBC = \angle MKB$, тобто $\angle MBE = \angle MKB$. А це означає, що $\triangle MBE \sim \triangle MKB$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що $MB^2 = ME \cdot MK$. Аналогічно доводиться, що $MC^2 = MF \cdot ML$. Оскільки $MB = MC$, то $ME \cdot MK = MF \cdot ML$. Звідси випливає, що точки K, E, F, L — циклічні, тобто чотирикутник $KEFL$ — вписаний в деяке коло. За властивістю вписаних кутів та відповідних кутів при паралельних прямих, одержуємо: $\angle MAL = \angle MKL = \angle MFL = \angle MVD$. Так як $\angle MAL = \angle MVD$, то чотирикутник $DALV$ — циклічний. Тому,

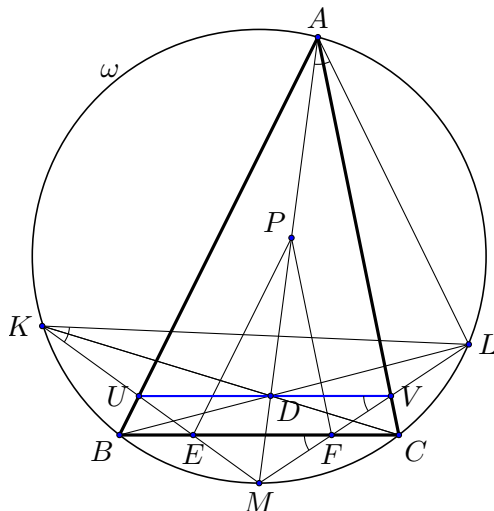


Рис. 3

$$\angle MLD = \angle VLD = \angle VAD = \angle CAM = \angle MAB = \angle MLB,$$

тобто $\angle MLD = \angle MLB$. Оскільки точки D і B лежать по один бік від прямої ML , то точки L , D і B — колінеарні, тобто відрізок BL проходить через точку D . Аналогічно доводиться, що відрізок CK також проходить через точку D , що і завершує розв'язання задачі. $\square$

Приклад 2.4. Нехай ABC — гострокутний трикутник, в якому $AB > AC$ і O центр описаного кола ω . На стороні BC відмітили точку D таку, що $\angle BAD = \angle CAO$. Нехай E — друга точка перетину прямої AD з колом ω . Позначимо через M , N і P — середини відрізків BE , OD і AC відповідно. Доведіть, що точки M , N і P — колінеарні.

(Запропонована Македонією на Міжнародну математичну олімпіаду балканських країн, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 4).

Для розв'язання цієї задачі застосуємо реверсний метод: нехай пряма MP перетинає пряму OD у точці K . Доведемо, що K — середина OD . Тоді точка K співпадатиме з точкою N .

Оскільки P — середина AC , то $OP \perp AC$. За умовою задачі точка D є такою, що $\angle BAD = \angle CAO = 90^\circ - \angle POA = 90^\circ - \angle CBA$. Тому, $\angle ADB = 90^\circ$, тобто D — основа висоти трикутника ABC , опущеної з вершини A . Нехай H — ортоцентр трикутника ABC . Нехай пряма AD

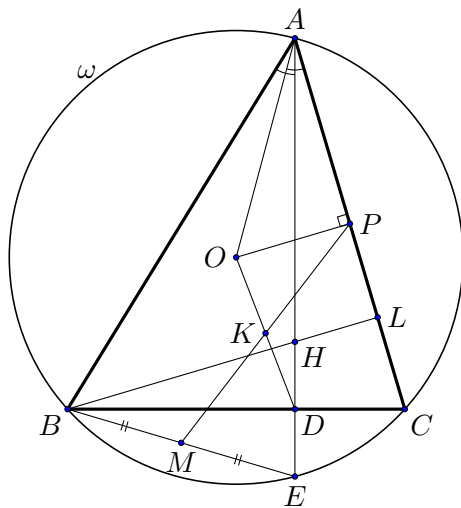


Рис. 4

перетинає вдруге коло ω у точці E , а пряма BH перетинає пряму AC у точці L . Тоді BL — висота трикутника ABC і $DE = DH$ (це відома властивість про ортоцентр трикутника). Так як DM — медіана прямокутного трикутника BDE , то $DM = \frac{1}{2}BE$. Але так як точки H і E симетричні відносно BC , то $BE = BH$. Як відомо, $OP = \frac{1}{2}BH$. Тому, $OP = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}BE = DM$ і $DM \parallel BH \parallel OP$. А це означає, що чотирикутник $DMOP$ — паралелограм, бо його дві сторони рівні і паралельні. Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться

навпіл, то K — середина OD , що і завершує розв’язання задачі. $\square$

Приклад 2.5. Задано гострокутний трикутник ABC , в якому M — середина AB , AP і BQ — його висоти. Доведіть, що пряма AC дотикається описаного кола трикутника BPM тоді і тільки тоді, коли пряма BC дотикається описаного кола трикутника AQM .

(Румунія, 2014 р.)

Розв’язання. Зобразимо малюнок, що відповідає умові задачі, і будемо розв’язувати її, виходячи з нього (рис. 5).

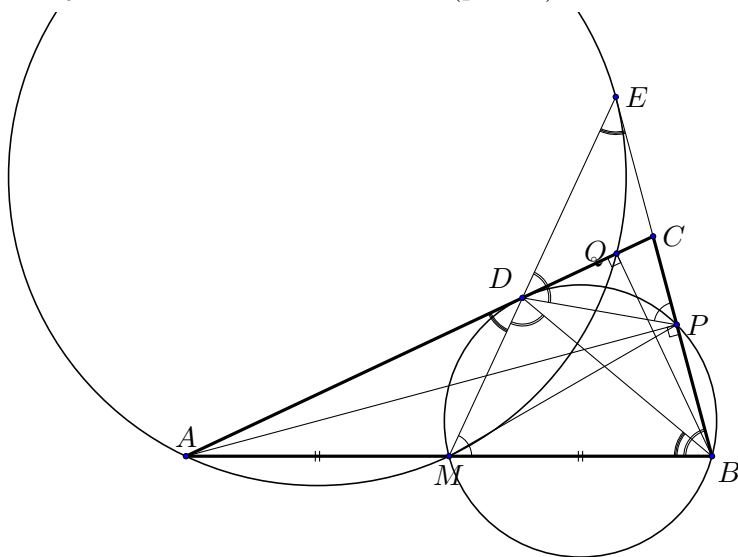


Рис. 5

Спочатку доведемо, що коли описане коло трикутника BPM дотикається до прямої AC , то описане коло трикутника AQM дотикається до прямої BC . Для розв’язування цієї задачі застосуємо реверсний метод: нехай описане коло трикутника BPM дотикається прямої AC у точці D , а пряма MD перетинає пряму BC у точці E . Доведемо, що коло, яке описане навколо трикутника AME , дотикається до прямої BC у точці E і проходить через точку Q .

Оскільки $BMDP$ — вписаний чотирикутник, то за властивістю вписаних кутів матимемо: $\angle EPD = \angle DMB$ і $\angle EDP = \angle PBM$. Оскільки PM — медіана прямокутного трикутника, то $PM = BM = MA$. Оскільки трикутник BMP — рівнобедрений, то $\angle PBM = \angle BPM$, а за властивістю вписаних кутів: $\angle BPM = \angle BDM$. Тому, $\triangle EDP \sim \triangle BDM$ (за двома кутами). Звідси випливає, що їх треті кути рівні між собою:

$\angle PED = \angle MBD$. Далі, за властивістю кута між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику, матимемо: $\angle MBD = \angle MDA$. Але $\angle MDA = \angle EDC$ (як вертикальні). Тому $\angle CED = \angle CDE$, тобто трикутник ECD — рівнобедрений і $CD = CE$. А тепер застосуємо теорему Менелая для трикутника ABC і прямої $\overline{EDM}$: $\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$. Звідси, враховуючи, що $CD = DE$ і $BM = AM$, одержуємо: $AD = BE$.

Отже, $BE^2 = AD^2 = AM \cdot AB = BM \cdot AB$, тобто $BE^2 = BM \cdot AB$ (тут ми скористалися теоремою про дотичну і січну, що проведені із точки). Нехай пряма BC перетинає описане коло трикутника AME у точках E і F , тоді за теоремою про січні, що проведені із точки B до цього кола, $BE \cdot BF = BM \cdot BA$. Із останніх двох співвідношень випливає, що $BF = BE$, тобто $F = E$. А це означає, що точка E — точка дотику прямої BC з описаним колом трикутника AME .

Далі $\triangle CBQ \sim \triangle CAP$ (за двома кутами: $\angle CQB = \angle CPA = 90^\circ$, $\angle PCQ$ — спільний). З подібності цих трикутників випливає пропорційність відповідних сторін: $\frac{CA}{CB} = \frac{CP}{CQ}$, тобто $CQ \cdot CA = CP \cdot CB$. За теоремою про дотичну і січну, що проведені із точки C до описаного кола трикутника BPM : $CP \cdot CB = CD^2$. Оскільки $CD = CE$, то із трьох останніх співвідношень, одержуємо: $CE^2 = CQ \cdot CA$. Далі, нехай пряма CA перетинає описане коло трикутника AEM у точках A і S . Тоді, за теоремою про дотичну і січну, що проведені із точки C до описаного кола трикутника AEM : $CE^2 = CS \cdot CA$. Із останніх двох рівностей знаходимо: $CS = CQ$, тобто точки S і Q — збігаються. Отже, точка Q належить описаному колу трикутника AEM , що і треба було довести.

Обернене твердження — якщо пряма BC дотикається до описаного кола трикутника AQM , то пряма AC дотикається до описаного кола трикутника BPM , доводиться аналогічно.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.6. Нехай BE і CF — висоти трикутника ABC , M — середина його сторони BC , а K — друга точка перетину описаних кіл трикутників ABC і AEF . Доведіть, що $\angle AKM = 90^\circ$.

Вказівка. Нехай D — друга точка перетину прямої KM з описаним колом трикутника ABC . Доведіть, що AD — діаметр цього кола.

Задача 2.7. Нехай M — довільна точка дуги BC описаного кола трикутника ABC , яка не містить точку A , MP і MQ — перпендикуляри,

опущені із точки M на прямі AB і AC відповідно. Нехай H — ортоцентр цього трикутника. Доведіть, що пряма PQ ділить відрізок MH навпіл.

Вказівка. Нехай N і K такі точки, що P і Q — середини відрізків MN і MK відповідно. Доведіть, що пряма NK проходить через точку H .

Задача 2.8. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC , M — середина його сторони BC , H — точка перетину висот AD , BE і CF , P — точка перетину прямих AD і FE , а Q — точка перетину прямих AO і BC . Доведіть, що $PQ \parallel HM$.

Вказівка. Доведіть, що прямі AO і HM перетинаються у точці, яка лежить на описаному колі трикутника ABC . Для цього розгляньте точку D , яка діаметрально протилежна до точки A і доведіть, що $HBDC$ — паралелограм.

Задача 2.9. Нехай H — точка перетину його висот BE і CF трикутника ABC , а N — точка перетину прямих BC і EF . Нехай NK — перпендикуляр, опущений із точки H на пряму AN . Доведіть, що пряма NK ділить сторону BC навпіл.

Вказівка. Доведіть, що $MN \perp AN$, де M — середина BC .

Література

1. Кукуш А. Г., Никулин А. В., Татаренко Ю. С. Геометрия на плоскости (Планиметрия). — Минск : Альфа, 1996.
2. Кушнір І. А. Триумф школьної геометрії. — К. : Наш час, 2005.
3. Прасолов В. В. Задачі по геометрії. — М. : МЦНМО, 2001.
4. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України 2001–2006. — Львів : Каменяр, 2008.
5. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
6. Ясінський В. А. Олімпіадні задачі з геометрії. Навчально-методичний посібник. — К. : Шкільний світ, 2008.

В'ячеслав Ясінський

Метод біноміальних перетворень при розв'язуванні показникових рівнянь у цілих числах¹

Суть цього методу розв'язування діофантових показникових рівнянь полягає у виконанні алгебраїчних перетворень та оцінок, пов'язаних з використанням формули бінома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^0 b^n,$$

де $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, $\dots$, $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$, $\dots$, $C_n^{n-1} = n$, $C_n^n = 1$ — біноміальні коефіцієнти (всі вони натуральні), тобто

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \\ + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}a^{n-k}b^k + \dots + nab^{n-1} + b^n,$$

де $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$.

Справедливість цієї формули можна довести, наприклад, методом математичної індукції.

Крім того, треба використовувати ще низку класичних тверджень, пов'язаних із біноміальними коефіцієнтами.

Теорема 1. Якщо $m \geq 2$, $x \geq 0$, де $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, то

$$(x+1)^m - x^m \geq 1 + mx.$$

ДОВЕДЕННЯ. 1-й спосіб. Розглянемо функцію $f(x) = (x+1)^m - x^m - 1 - mx$, тоді $f'(x) = m((x+1)^{m-1} - x^{m-1} - 1) \geq 0$, тобто $f(x)$ зростає на проміжку $[0, +\infty]$. Тому $f(x) \geq f(0) = 0$.

2-й спосіб. Маємо:

$$(x+1)^m - x^m = x^m + mx^{m-1} + \dots + mx + 1 - x^m = mx^{m-1} + \dots + mx + 1,$$

що і треба було довести. $\square$

А тепер перейдемо до застосування цієї теореми в процесі розв'язування рівнянь у цілих числах, що пропонувалися на національних математичних олімпіадах різних країн.

¹Журнал «Математика в школі», 2005, №9. — С. 46–53.

1. Розв'язати рівняння $x^z - y^z = 5$ в натуральних числах x, y, z ($z > 1$).

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $x > y$, тобто $x \geq y + 1$, тоді $5 = x^z - y^z \geq (y + 1)^z - y^z \geq 1 + yz \geq 1 + 2y$. Звідси $5 \geq 1 + 2y$, тобто $y = 1$ або $y = 2$.

Якщо $y = 1$, то $x^z = 6$, що неможливо.

Якщо $y = 2$, то $5 \geq 1 + yz \geq 1 + 2z$, тобто $z = 2$. Далі маємо $x^2 - 2^2 = 5$, $x = 3$.

Відповідь. $\{(3; 2; 2)\}$.

2. Розв'язати рівняння $2^x + 3^x = y^z$ в натуральних числах x, y, z , де x — просте число, $z > 1$.

Розв'язання. Якщо $x = 2$, то $y^z = 13$, що неможливо, оскільки $z > 1$. Отже, $x \neq 2$. Якщо $x = 3$, то $y^z = 35$, що неможливо, оскільки $z > 1$. Отже, $x \neq 3$. Якщо $x = 5$, то $y^z = 275$, що неможливо, оскільки $y^z : 11$, $y : 11$, тобто $y^z : 11^2$, що суперечить умові $275 = 25 \cdot 11$.

Нехай $x \geq 7$, x — просте непарне число. Використовуючи біном Ньютона, одержуємо: $2^x + 3^x = 2^x + (5 - 2)^x = 2^x + (5^2k + x \cdot 5 \cdot 2^{x-1} - 2^x) = 5(5k + x \cdot 2^{x-1})$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Оскільки $x \neq 5$, то $5(5k + x \cdot 2^{x-1})$ ділиться на 5 і не ділиться на 5^2 , тобто y^z ділиться на 5 і не ділиться на 5^2 , що неможливо, оскільки $z > 1$.

Відповідь. $\emptyset$.

3. Розв'язати рівняння

а) $2^x - 3^y = 1$;

б) $3^x - 2^y = 1$;

в) $5^x - 2^y = 1$;

г) $7^x - 2^y = 1$

в натуральних числах x, y .

Розв'язання.

а) Якщо $x = 1$, то $y = 0$. Якщо $x = 2$, то $y = 1$. Припустимо, що $x \geq 3$, тоді $3^y + 1 = 2^x$ ділиться на 8.

Якщо $y = 2k + 1$, то $3^y + 1 = 3(8 + 1)^k + 1 = 3(8a + 1) + 1 = 24a + 4$ не ділиться на 8, оскільки за біномом Ньютона $(8 + 1)^k + 1 = 8a + 1$, $a \in \mathbb{N}$. Якщо $y = 2k$, то $3^y + 1 = (8 + 1)^k + 1 = (8a + 1) + 1 = 8a + 2$ не ділиться на 8.

Відповідь. $\{(2; 1)\}$.

б) Якщо $y = 1$, то $x = 1$. Якщо $y = 2$, то $3^x = 5$, що неможливо. Якщо $y = 3$, то $x = 2$.

Нехай $y > 3$, тоді $3^x - 1 = 2^y$ ділиться на 8. Якщо $x = 2k + 1$, то $3^{2k+1} - 1 = 3 \cdot (8 + 1)^k - 1 = 3 \cdot (8a + 1) - 1 = 24a + 2$ не ділиться на 8. Якщо $x = 2k$, то $2^y = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$, тобто $3^k - 1 = 2^m$ і $3^k + 1 = 2^n$, де цілі m, n такі, що $n > m \geq 0$, $n + m = y$. Звідси випливає, що $2^n - 2^m = 2$, $2^m(2^{n-m} - 1) = 2$, тобто 2^m ділить 2. Звідки $m = 0$ або $m = 1$. У випадку $m = 0$ одержуємо $n = 2$, $y = m + n = 3$, $x = 2$, а у випадку $m = 1$, $2^n = 3$, що неможливо.

Відповідь. $\{(1; 1), (2; 3)\}$.

в) Якщо $y = 1$, то $5^x = 3$, що неможливо. Якщо $y = 2$, то $x = 1$. Припустимо, що $y > 2$. Маємо $2^y + 1 = 5^x$ ділиться на 5. Розглянемо такі випадки:

1) $2^{4k+1} + 1 = 2(15 + 1)^k + 1 = 2(15a + 1) + 1 = 30a + 3$ не ділиться на 5;

2) $2^{4k+3} + 1 = 8(15 + 1)^k + 1 = 8(15a + 1) + 1 = 120a + 9$ не ділиться на 5;

3) $2^{4k} + 1 = (15 + 1)^k + 1 = 15a + 2$ не ділиться на 5.

Отже, $y = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

Далі маємо $5^x - 1 = 4 \cdot 16^k$, тому $5^x - 1$ ділиться на 16. Аналогічним міркуваннями знаходимо, що $x = 4n$, $n \in \mathbb{N}$ (оскільки при $x = 4n + 1$; $4n + 2$; $4n + 3$; $4n + 4$ $5^x - 1$ не ділиться на 16).

Маємо: $5^{4n} - 1 = 4 \cdot 16^k$, $(5^{2n} - 2 \cdot 4^k)(5^{2n} + 2 \cdot 4^k) = 1$, $5^n - 2 \cdot 4^k = 1$, $5^n + 2 \cdot 4^k = 1$. Звідки $4 \cdot 4^k = 0$, що неможливо.

Відповідь. $\{(1; 2)\}$.

г) Якщо $y = 1$, то $7^x = 3$, що неможливо. Якщо $y > 1$, то $7^x - 1 = 2^y$ ділиться на 4.

Якщо $x = 2k + 1$, то $7^x - 1 = 7 \cdot (48 + 1)^k - 1 = 7(48a + 1) - 1 = 336a + 6$ не ділиться на 4.

Якщо $x = 2k$, то $7^{2k} - 1 = 2^y$, $(7^k - 1)(7^k + 1) = 2^y$, $7^k - 1 = 2^m$, $7^k + 1 = 2^n$, де m, n такі, що $n > m \geq 0$, $n + m = y$. Далі одержуємо, що $2^n - 2^m = 2$, $2^m(2^{n-m} - 1) = 2$. Звідки $m = 0$ або $m = 1$. Якщо $m = 0$, то $2^n = 3$, що неможливо. Якщо $m = 1$, то $n = 2$, $y = m + n = 3$, $7^x = 3$, що неможливо.

Відповідь. $\emptyset$.

4. Розв'язати рівняння

- а) $5^x - 3^y = 2$;
- б) $5^x - 3^y = 4$;
- в) $5^x - 3^y = 8$;
- г) $5^x - 3^y = 16$.

в натуральних числах x, y .

Розв'язання. а) Якщо $y = 1$, то $x = 1$. Припустимо, що $y > 1$, тоді $5^x - 2 = 3^y$ ділиться на 9, тобто 5^x при діленні на 9 дає остачу 2.

Помічаємо, що $5^6 - 1$ ділиться на 9, а 5^n при діленні на 9 дає послідовно остачі 5, 7, 8, 4, 2, 1, 5, ..., тобто $x = 5 + 6k$, де $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Оскільки $5^6 - 1$ ділиться на 7 (мала теорема Ферма), то

$$5^x = 5^{6k+5} = 5^5(5^{6k} - 1) + (5^5 - 1) = 5^5(5^6 - 1)a + (7 \cdot 446 + 3) = 7b + 3,$$

тобто $3^y = 5^x - 2 = 7b + 1$, тобто $3y$ при діленні на 7 дає остачу 1. Але 3^n при діленні на 7 дає послідовні остачі 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, ..., тобто $y = 6m$, $m \in \mathbb{N}$. Отже, $5^x - 3^{6m} = 2$, $5^x - 3 = 3^{6m} - 1$. Оскільки $3^6 - 1$ ділиться на 13, то $3^{6m} - 1$ ділиться на 13, тобто $5^x - 3$ ділиться на 13, однак 5^x при діленні на 13 дає послідовно остачі 5, 12, 8, 1, 5, ... (як бачимо, остачі 3 немає!). Отримали суперечність.

Відповідь. $\{(1; 1)\}$.

б) Припустимо, що y — непарне число, тоді за умовою задачі маємо:

$$(4 + 1)^x - 4 = (4 - 1)^y, (4a + 1) - 4 = 4b - 1, a - b - 1 = \frac{1}{2},$$

де $a, b \in \mathbb{N}$, що неможливо. Отже, $y = 2m$, $m \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що x — непарне число, тоді за умовою задачі одержуємо: $(6 - 1)^x = 3^y + 4$, $6c - 1 = 3^y + 4$, $2c - 3^{y-1} - 1 = \frac{2}{3}$, де $c \in \mathbb{N}$, що неможливо.

Отже, $x = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Далі маємо $5^{2n} - 3^{2m} = 4$, $(5^n - 3^m)(5^n + 3^m) = 4$, що еквівалентно сукупності двох систем:

$$\begin{cases} 5^n - 3^m = 1, \\ 5^n + 3^m = 4; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 5^n - 3^m = 2, \\ 5^n + 3^m = 2; \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} 5^n = 2, 5, \\ 3^m = 1, 5; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 5^n = 2, \\ 3^m = 0, \end{cases}$$

що неможливо.

Відповідь. $\emptyset$.

в) Припустимо, що y — непарне, тоді

$$(4+1)^x = 8 + (4-1)^y, \quad 4a+1 = 8 + (4b-1), \quad a-b-2 = \frac{1}{2},$$

де $a, b \in \mathbb{N}$, що неможливо. Отже, $y = 2m$, $m \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що $x = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$ (оскільки $x > 1$), тоді $5^{2n+1} = 8 + 9^m$, $5(24c+1) = 8 + (8d+1)$, $d-15c+1 = \frac{1}{2}$, де $c, d \in \mathbb{N}$, що неможливо. Отже, $x = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Тому $5^{2n} - 3^{2m} = 8$, $(5^n - 3^m)(5^n + 3^m) = 8$. Оскільки $5^n - 3^m$ та $5^n + 3^m$ парні числа і $5^n - 3^m < 5^n + 3^m$, то $5^n - 3^m = 2$ і $5^n + 3^m = 4$. Звідки $5^n = 3$, що неможливо.

Відповідь. $\emptyset$.

г) Міркуваннями, аналогічними до міркувань, що наведені в пункті б), знаходимо, що x, y — парні числа, тобто $x = 2n$, $y = 2m$, де $m, n \in \mathbb{N}$.

Маємо $(5^n - 3^m)(5^n + 3^m) = 16$. Оскільки числа $5^n - 3^m$ та $5^n + 3^m$ парні і $5^n - 3^m < 5^n + 3^m$, то можливо лише $5^n - 3^m = 2$, $5^n + 3^m = 8$. Звідки $5^n = 5$ і $3^m = 3$, тобто $m = n = 1$, $x = y = 2$.

Відповідь. $\{(2; 2)\}$.

5. Розв'язати рівняння а) $7^x - 3^y = 2$; б) $7^x - 3^y = 4$ в натуральних числах x, y .

Розв'язання. а) Маємо:

$$2 + 3^y = (6+1)^x, \quad 2 + 3^y = 6a + 1, \quad 3^{y-1} - 2a = -\frac{1}{3},$$

де $a \in \mathbb{N}$, що неможливо.

Відповідь. $\emptyset$.

б) Якщо $y = 1$, то $x = 1$. Припустимо, що $y \geq 2$, тоді $7^x - 4 = 3^y$ ділиться на 9, тобто 7^x при діленні на 9 дає остачу 4.

Число 7^x при діленні на 9 дає послідовно такі остачі: 7; 4; 1; 7... , тому $x = 3k + 2$, де $k \in \mathbb{N}$. Далі маємо $7^{3k+2} = 3^y + 4$, $49(7^{3k} - 1) = 3^y - 45$. Оскільки 19 ділить $7^3 - 1$, а $7^3 - 1$ ділить $7^{3k} - 1$, то 19 ділить $3^y - 45 = (3^y - 7) - 2 \cdot 19$, тобто 19 ділить $3^y - 7$, а це означає, що 3^y при діленні на 19 дає остачу 7.

Число 3^y при діленні на 19 дає послідовно такі остачі: 3; 9; 8; 5; 15; 7; 2; 6; 18; 16; 10; 11; 14; 4; 12; 17; 13; 1; 3; ... , тому $y = 18l + 6 = 2(3 + 9l) = 2n$, де $n \in \mathbb{N}$.

Далі маємо $7^{2n} - 4 = 3^y$, $(7^n - 2)(7^n + 2) = 3^y$, $7^n - 2 = 3^m$, $7^n + 2 = 3^s$, де цілі m, s такі, що $s > m \geq 0$, $s+m = y$. Звідси $3^s - 3^m = 4$, $3^m(3^{s-m} - 1) = 4$, тобто 3^m ділить 4. Отже, $m = 0$, а $3^s = 5$, що неможливо.

Відповідь. $\{(1; 1)\}$.

6. Розв'язати рівняння $10^x - 3^y = 7$ в натуральних числах x, y .

Розв'язання. Якщо $y = 1$, то $x = 1$. Припустимо, що $y \geq 2$, тоді $10^x - 7 = 3^y$ ділиться на 9, однак $10^x - 7 = (9 + 1)^x - 7 = (9a + 1) - 7 = 9a - 6$ не ділиться на 9. Отримали суперечність.

Відповідь. $\{(1; 1)\}$.

7. Розв'язати рівняння $2^x - 3^y = 5$ в натуральних числах x, y .

Розв'язання. $2^x = 5 + 3^y \geq 8$, тобто $x \geq 3$. Якщо $x = 3$, то $y = 1$. Очевидно, що $x \neq 4$. Якщо $x = 5$, то $y = 3$. Припустимо, що $x \geq 6$, тоді $3^y + 5$ ділиться на 64, тобто $(3^y - 59) + 64$ ділиться на 64. А це означає, що 3^y при діленні на 64 дає остачу 59. Але 3^y при діленні на 64 дає послідовно такі остачі: 3; 9; 27; 17; 51; 25; 11; 33; 35; 41; 59; 49; 19; 57; 43; 1; 3; ..., тому $y = 16k + 11$.

Помічаємо, що $3^{16} - 1$ ділиться на 17 (мала теорема Ферма), тоді $3^y = 3^{11+16k} = 3^{11}(3^{16k} - 1) + 3^{11} = 3^{11} \cdot (17 \cdot a) + (10420 \cdot 17 + 7) = 17b + 7$, де $a, b \in \mathbb{N}$. Отже, $2^x = 3^y + 5 = 17b + 12$, тобто 2^x при діленні на 17 дає в остачі 12. Але 2^x при діленні на 17 дає послідовно такі остачі: 2; 4; 8; 16; 15; 13; 9; 1; 2; ..., серед яких немає 12. Одержали суперечність.

Відповідь. $\{(1; 1)\}$.

8. Розв'язати рівняння

а) $2^x - 1 = y^z (y > 1, z > 1)$;

б) $2^x + 1 = y^z (z > 1)$

в натуральних числах x, y, z .

Розв'язання. а) З умови випливає, що y — непарне число. Оскільки $y > 1$, то $x > 1$, тобто $x \geq 2$, а це означає, що $y^z + 1 = 2^x$ ділиться на 4.

Якщо $z = 2l$, то

$$y^z + 1 = y^{2l} + 1 = (y^l)^2 + 1 = (2a + 1)^2 + 1 = 4(a^2 + a) + 2$$

не ділиться на 4 ($a \in \mathbb{N}$).

Якщо $z = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, то

$$2^x = y^z + 1 = y^{2l+1} + 1 = (y + 1)(y^{2l} - y^{2l-1} + \dots - y + 1),$$

тобто $y + 1$ ділить 2^x , тобто $y + 1 = 2^s$, де $s \in \mathbb{N}$, $s \leq x$. Якщо $s = x$, то $y^{2l} - y^{2l-1} + \dots - y + 1 = 1$, це неможливо, оскільки $y^{2l} - y^{2l-1} + \dots - y + 1 = y^{2l-1}(y - 1) + y^{2l-3}(y - 1) + \dots + y(y - 1) + 1 > 1$.

Якщо $s = 1$, то $y = 1$, що неможливо. Отже, $2 \leq s < x$, $x - s > 0$, тоді

$$\begin{aligned} 2^x &= y^z + 1 = (2^s + 1)^{2l+1} + 1 = (\text{за біномом Ньютона}) \\ &= (b \cdot 2^s + 1) + 1 = b \cdot 2^s + 2, 2^x = b \cdot 2^s + 2, \end{aligned}$$

де ліва частина ділиться на 4, а права — ні. Отримали суперечність.

Відповідь. $\emptyset$.

б) З умови робимо висновок, що y — непарне число. Оскільки $z > 1$, то $x > 1$, $x \geq 2$, тому $y^z - 1 = 2^x$ ділиться на 4.

Якщо z — непарне число, $z = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, то

$$2^x = y^z - 1 = y^{2l+1} - 1 = (y - 1)(y^{2l} + y^{2l-1} + \dots + y + 1),$$

звідки $y - 1$ ділить 2^x , тобто $y - 1 = 2^s$, де $s \in \mathbb{N}$, $2 \leq s \leq x$, і оскільки $y^{2l} + \dots + y + 1 > 1$, то $y - 1 \neq 2^x$, тобто $s \neq x$, а точніше $s < x$. Тому в цьому випадку, одержуємо:

$$\begin{aligned} 2^x &= y^z - 1 = (2^s + 1)^{2l+1} - 1 = (\text{за біномом Ньютона}) \\ &= (b \cdot (2^s)^2 + (2l + 1) \cdot 2^s + 1) - 1 = 2^s(2^s b + 2l + 1), \end{aligned}$$

тобто $2^{x-s} = 2^s b + 2l + 1$, де $b \in \mathbb{N}$, що неможливо, оскільки в лівій частині стоїть парне число, а у правій — непарне. Отримали суперечність.

Отже, z — парне число, тобто $z = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Маємо

$$y^z - 1 = (y^l - 1)(y^l + 1) = 2^x, \quad y^l - 1 = a, \quad y^l + 1 = b,$$

де a, b — такі цілі числа, що $a + b = x$, $b > a \geq 0$. Звідки одержуємо $2^b - 2^a = 2$, $2^a(2^{b-a} - 1) = 2$, тобто 2^a ділить 2, а це означає, що $a = 0$ або $a = 1$.

Якщо $a = 0$, то $2^b = 3$, що неможливо. Якщо $a = 1$, то $b = 2$, $x = a + b = 3$, $y^l = 2^a + 1 = 3$, $y = 3$, $l = 1$, $z = 2l = 2$.

Відповідь. $\{(3; 3; 2)\}$.

9. Розв'язати рівняння

а) $2^x + 3^y = z^2$;

б) $3^x + 5^y = z^2$;

в) $2^x + 5^y = z^2$

в натуральних числах x, y, z .

Розв'язання. а) Оскільки $2^x + 3^y$ не ділиться на 3, то і z^2 при діленні на 3, то і z^2 не ділиться на 3, тобто $z = 3k \pm 1$, де $k \in \mathbb{N}$, тоді

$3^a(3^{b-a} - 1) = 2 \cdot 5^k$ і $z^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$. Тому z^2 при діленні на 3 дає остачу 1.

Якщо x непарне, то $2^x = 2^{2m+1} = 2(3+1)^m = 2(3a+1) = 6a+2$, тобто $2^x + 3^y = 3(2a + 3^{y-1}) + 2$. А це означає, що $2^x + 3^y$ при діленні на 3 дає остачу 2. Отримали суперечність. Отже, $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Далі маємо $3^y = z^2 - 2^{2k} = (z - 2^k)(z + 2^k)$, тобто $z - 2^k = 3^a$ і $z + 2^k = 3^b$, де a і b — цілі числа такі, що $a + b = y$, $b > a \geq 0$.

Звідки $3^b - 3^a = 2^{k+1}$, $3^a(3^{b-a} - 1) = 2^{k+1}$, тобто 3^a ділить 2^{k+1} . Тому $a = 0$, $3^b - 1 = 2^{k+1}$, тобто $b = 1$, $k = 0$, або $b = 2$, $k = 2$ (див. задачу 3).

Однак $k \in \mathbb{N}$, тому $b = 2$, $k = 2$, $y = a + b = 2$, $x = 2k = 4$, $z^2 = 2^4 + 3^2 = 25$, $z = 5$.

Відповідь. $\{(4; 2; 5)\}$.

б) Оскільки $3^x + 5^y$ не ділиться на 3, то z^2 не ділиться на 3, тобто $z = 3k \pm 1$, тому z^2 при діленні на 3 дає остачу 1.

Якщо y — непарне число, то

$$5^y = 5^{2m+1} = 5 \cdot 25^m = 5 \cdot (24 + 1)^m = 5 \cdot (24a + 1) = 3(40a + 1) + 2,$$

тобто $3^x + 5^y = 3(40a + 3^{x-1} + 1) + 2$, а це означає, що z^2 при діленні на 3 дає остачу 2. Отримали суперечність.

Отже, y — парне число. Далі маємо

$$3^x + 5^{2k} = z^2, \quad 3^x = (z - 5^k)(z + 5^k),$$

де $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що $z - 5^k = 3^a$, $z + 5^k = 3^b$, де a , b — цілі числа такі, що $a + b = y$, $b > a \geq 0$, тобто $3^b - 3^a = 2 \cdot 5^k$, $3^a(3^{b-a} - 1) = 2 \cdot 5^k$, а це означає, що 3^a ділить $2 \cdot 5^k$. Звідси $a = 0$, $3^b - 1 = 2 \cdot 5^k$.

Оскільки 5 ділить $3^b - 1$, то $b = 4n$, $n \in \mathbb{N}$ (легко показати, що $3^{4n} - 1 = 81^n - 1 = (80 + 1)^n - 1 = (80p + 1) - 1 = 80p \div 5$, а $3^{4n+1} - 1$, $3^{4n+2} - 1$, $3^{4n+3} - 1$ не діляться на 5).

Отже, $3^{4n} - 1 = 2 \cdot 5^k$, $(9^n - 1)(9^n + 1) = 2 \cdot 5^k$. Але $9^n - 1$ та $9^n + 1$ — два послідовних парних числа, тому їх добуток ділиться на 8, однак $2 \cdot 5^k$ не ділиться на 8.

Відповідь. $\emptyset$.

в) Припустимо, що x — непарне число, $x = 2m + 1$, тоді

$$2^x = 2 \cdot 4^m = 2 \cdot (5 - 1)^m = 2 \cdot (5a \pm 1),$$

а $2^x + 5^y$ при діленні на 5 дає остачу 2 або 3, однак z^2 при діленні на 5 дає остачі 0, 1 або 4. Дійсно, $(5k)^2 = 5 \cdot (5k)^2 + 0$, $(5k \pm 1)^2 = 5 \cdot (5k^2 \pm 2k) + 1$, $(5k \pm 2)^2 = 5 \cdot (5k^2 \pm 4k) + 4$.

Отже, x — парне число, тобто $x = 2m$. Тоді

$$\begin{aligned} 2^{2m} + 5^y &= z^2, \\ 5^y &= (z - 2^m)(z + 2^m), \\ z - 2^m &= 5^a \quad \text{і} \quad z + 2^m = 5^b, \end{aligned}$$

де a, b — такі цілі числа, що $a + b = y$, $b > a \geq 0$. Звідси випливає, що $5^b - 5^a = 2^{m+1}$, $5^a(5^{b-a} - 1) = 2^{m+1}$, тобто 5^a ділить 2^{m+1} , тоді $a = 0$.

Тому $5^b - 1 = 2^{m+1}$, звідки знаходимо (див. задачу 3), що $b = 1$, $m = 1$, $x = 2m = 2$, $y = a + b = 1$, $z^2 = 5 + 2^2 = 9$, $z = 3$.

Відповідь. $\{(2; 1; 3)\}$.

10. Нехай $p = 4k + 3$, $q = pt - 1$, де $k, t \in \mathbb{N}$ — прості числа. Розв'язати рівняння $p^x + q^y = z^2$ в натуральних числах.

Розв'язання. Якщо y — непарне число, то $y = 2n + 1$, тоді $q^y = (pt - 1)^{2n+1} = pa - 1$, де $a \in \mathbb{N}$. Тому $z^2 = p^x + q^y = p(a + p^{x-1}) - 1$, тобто $z^2 + 1 : p$, де $p = 4k + 3$, а це неможливо.

Дійсно, якщо $(z^2 + 1) : p$ і $(z^2)^{2n+1} + 1 = z^{4n+2} + 1 = z^{p-1} + 1 = (z^{p-1} - 1) + 2$, то $(z^{p-1} - 1) + 2$ ділиться на p . Але за малою теоремою Ферма $2^{p-1} - 1$ ділиться на p , тобто $p = 2$, що суперечить умові $p = 4k + 3$.

Отже, y — парне число, $y = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, тоді $p^x + q^y = z^2$, $p^x = (z - q^n)(z + q^n)$. Звідки $z - q^n = p^a$, $z + q^n = p^b$, де цілі числа a, b такі, що $x = a + b$, $b > a \geq 0$. Тому, $p^b - p^a = 2q^n$, $p^a(p^{b-a} - 1) = 2q^n$, і коли $a > 0$, то p ділить $2q^n$, тобто $p = 2$ або $p = q$, однак $p = 4k + 3$, тобто $p \neq 2$; а $q = pt - 1$, тобто $p \neq q$. Отже, $a = 0$, тоді $p^b - 1 = 2q^n = 2(pt - 1)^n = 2(ps \pm 1)$, де $s \in \mathbb{N}$, тобто $p^b - 1 = 2ps \pm 2$, $p(p^{b-1} - 2s) = 1 \pm 2$. Звідси p ділить 1 або p ділить 3, що неможливо, оскільки $p = 4k + 3 \geq 7$.

Відповідь. $\emptyset$.

11. Розв'язати рівняння $5^x + 1 = 2^y + 2^z \cdot 5^t$ в натуральних числах x, y, z, t .

Розв'язання. Якщо $y \geq 2$, $z \geq 2$, то $2^y + 2^z \cdot 5^t$ ділиться на 4, однак $5^x + 1 = (4 + 1)^x + 1 = (4a + 1) + 1 = 4a + 2$, де $a \in \mathbb{N}$, не ділиться на 4. Отже, $y = 1$ або $z = 1$.

Якщо $y = 1$, тоді $1 = 5^x - 2^z \cdot 5^t$, $5^{x-1} - 2^z \cdot 5^{t-1} = 5$, що неможливо. Отже, $z = 1$, тоді $5^x - 2 \cdot 5^t = 2^y - 1$, тобто $2^y - 1$ ділиться на 5. Звідки випливає, що $y = 4k$, де $k \in \mathbb{N}$.

Маємо

$$5^x - 2 \cdot 5^t = 16^k - 1. \quad (\star)$$

Якщо $t = 1$, то $5^x - 16^k = 9$. Припустимо, що x — непарне число, тоді $(6 - 1)^x - (15 + 1)^k = 9$, $(6b - 1) - (15c + 1) = 9$, $3(2b - 5c - 3) = 2$, де $b, c \in \mathbb{N}$, що неможливо. Отже, x — парне, $x = 2l$, тоді $5^{2l} - 16^k = 9$, $(5^l - 4^k)(5^l + 4^k) = 9$. Оскільки $5^l - 4^k < 5^l + 4^k$, то $5^l - 4^k = 1$, $5^l + 4^k = 9$, тобто $5^l = 5$, $4^k = 4$. Звідки $l = 1$, $k = 1$; $x = 2l = 2$, $y = 4k = 4$, $z = 1$, $t = 1$.

Припустимо, що $t \geq 2$. Маємо $2^y - 1 = 5^x - 2 \cdot 5^t$, тобто $5^x - 2 \cdot 5^t > 0$. Звідки випливає, що $5^x > 2 \cdot 5^t > 5^t$, тобто $x > t \geq 2$, $x \geq 3$. З $(\star)$ робимо висновок, що $16^k - 1$ ділиться на 25, тобто $k = 5n$, $n \in \mathbb{N}$, тоді $1 + 5^x = 2^{20n} + 2 \cdot 5^t$, $5^t(5^{x-t} - 2) = (2^{10})^{2n} - 1$ ділиться на $2^{10} - 1 = 11 \cdot 93$. А це означає, що 5^{x-t} ділиться на 11. Однак 5^s при діленні на 11 послідовно дає такі остачі: 5; 3; 4; 9; 1; 5; ..., але не 2. Отримали суперечність.

Відповідь. $\{(2; 4; 1; 1)\}$.

12. Знайти всі пари простих чисел (p, q) , при яких $\frac{2^p + 2^q}{pq}$ є цілим числом.

Розв'язання. Нам потрібно розв'язати рівняння $2^p + 2^q = pqr$ в натуральних числах p, q, n , де p, q — прості.

Розглянемо $p = 2$. За умовою $2^p + 2^q = 2^p + 4$ ділиться на q , тобто $(2^q + 4) - (2^q - 2) = 6$ ділиться на q . А це означає, що $q = 2$ або $q = 3$. Аналогічно при $q = 2$ знаходимо $p = 2$ або $p = 3$, в обох випадках $r = 2$.

Припустимо $p > 2$, $q > 2$. Тоді p, q — непарні числа. Якщо $p = q$, то $2^{p+1} = p^2 r$, тобто p ділить 2^{p+1} , звідки $p = 2$, $r = 2$.

Нехай $p \neq q$. Згідно з умовою, $2^p + 2^q$ ділиться на p , причому $2^p - 2$ також ділиться на p (за малою теоремою Ферма).

Отже, p ділить $(2^p + 2^q) - (2^p - 2) = 2^q + 2$. Звідси випливає, що $(2^q)^p + 2^p$ ділиться на $2^q + 2$, а отже, і на p . Далі приходимо до висновку, що $(2^{pq} + 2^p) - (2^p + 2) = 2^{pq} + 2$ ділиться на p .

Аналогічно доводимо, що $2^{pq} + 2$ ділиться на q . Звідси випливає, що $2^{pq} + 2 = 2(2^{pq-1} + 1)$ ділиться на pq , тобто $2^{pq-1} + 1$ (оскільки pq непарне і $(p, q) = 1$).

Доведемо, що отриманий результат є хибним. Нехай $pq = k$, тоді k ділить $2^{k-1} + 1$, де $k > 1$. Отже, k — непарне число. Нехай $k = p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_n^{m_n}$, де p_i — різні прості непарні числа, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$.

Нехай $p_i - 1 = 2^{l_i} t_i$, де $l_i \in \mathbb{N}$, t_i — непарне число. Оскільки $p_i^{m_i} - 1$ ділиться на $p_i - 1$, то $p_i^{m_i} - 1$ ділиться на 2^{l_i} . Нехай для визначеності $l_1 < l_2 < \dots < l_n$, тоді для будь-якого $i = 1, \dots, n$ маємо, що $p_i^{m_i} - 1$ ділиться на 2^{l_1} , тобто $p_i^{m_i} = 2^{l_1} s_i + 1$, $s_i \in \mathbb{N}$, тоді

$$k = p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_n^{m_n} = (2^{l_1} s_1 + 1) \cdot \dots \cdot (2^{l_1} s_n + 1) = 2^{l_1} s + 1, \quad s \in \mathbb{N},$$

тобто $k - 1$ ділиться на 2^{l_1} . Оскільки k ділить $2^{k-1} + 1$, то p_1 ділить $2^{k-1} + 1$, а оскільки t_1 — непарне, то p_1 ділить $2^{(k-1)t_1} + 1 = 2^{2^{l_1} s t_1} + 1 = 2^{(p-1)s} + 1$. За малою теоремою Ферма p_1 ділить $2^{p_1-1} - 1$, тобто p_1 ділить $2^{(p_1-1)s} - 1$.

Отже, p_1 ділить $(2^{(p_1-1)s} + 1) - (2^{(p_1-1)s} - 1) = 2$, що неможливо, оскільки $p_1 > 2$.

Відповідь. $\{(2; 2), (2; 3), (3; 2)\}$.

13. Розв'язати рівняння $x^z + (x + y)^z = (x + 2y)^z$ в натуральних числах x, y, z .

Розв'язання. Якщо $z = 1$, то $x = y$. Якщо $z = 2$, то $x^2 + (x + y)^2 = (x + 2y)^2$, $x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$, $(x + y)(x - 3y) = 0$, оскільки $x, y \geq 1$, то $x = 3y$.

Припустимо, що $z \geq 3$. Нехай $x + y = t$, $t \in \mathbb{N}$. Очевидно $t > y$. Маємо $(t - y)^z + t^z = (t + y)^z$. Нехай $d = (t, y)$, тоді $t = da$, $y = tb$, де $(a, b) = 1$, $a > b$, $a, b \in \mathbb{N}$, тому $(a - b)^z + a^z = (a + b)^z$. Розглянемо 2 випадки.

Нехай z — непарне число, тоді, застосовуючи формулу бінома Ньютона, одержимо:

$$\begin{aligned} (a^z - za^{z-1} + \dots + zab^{z-1} - b^z) + a^z &= a^z + za^{z-1} + \dots + zab^{z-1} + b^z, \\ (ta - b^z) + a^z &= ka + b^z, \end{aligned}$$

де $m, k \in \mathbb{N}$, $a(m - k + a^{z-1}) = 2b^z$. Звідси випливає, що $a \mid 2b^z$. Оскільки $(a, b) = 1$, то $a = 1$ або $a = 2$. Однак $a > b \geq 1$, звідки $a = 2$, $b = 1$. Отже, $1 + 2^z + 3^z$, що неможливо, оскільки $3^z = (2 + 1)^z > 2^z + 1$ для будь-якого $z \geq 3$. Отримали суперечність.

Нехай z — парне число, тоді аналогічно маємо:

$$\left(a^z - za^{z-1}b + \dots + \frac{z(z-1)}{2} a^2 b^{z-2} - zab^{z-1} + b^z \right) + a^z =$$

$$= a^z + za^{z-1}b + \dots + \frac{z(z-1)}{2}a^2b^{z-2} + zab^{z-1} + b^z,$$

$$(a^2s - zab^{z-1} + b^z) + a^z = a^2t + zab^{z-1} + b^z,$$

$$a^2(s - t + a^{z-2}) = 2zab^{z-1},$$

де $s, t \in \mathbb{N}$, тоді $a(s - t + a^{z-2}) = 2zb^{z-1}$. Оскільки $a \mid 2zb^{z-1}$, причому $(a, b) = 1$, то a ділить $2z$. Звідси $2z \geq a$.

Далі маємо:

$$(a+b)^z = a^z + (a-b)^z, \left(1 + \frac{b}{a}\right)^z = 1 + \left(1 - \frac{b}{a}\right)^z,$$

$$1 = (1+c)^z - (1-c)^z, \quad \text{де } c = \frac{b}{a}, 0 < c < 1. \quad (\star\star)$$

Помітимо, що $(1+c)^z + (1-c)^z > 2$ для будь-яких значень z, c ($0 < c < 1, z > 1$). Дійсно $(1+c)^2 - (1-c)^2 = 2 + 2c^2 > 2$. Припустимо, що $(1+c)^z + (1-c)^z > 2$ і доведемо, що $(1+c)^{z+1} + (1-c)^{z+1} > 2$.

Маємо:

$$\begin{aligned} (1+c)^{z+1} + (1-c)^{z+1} &= (1+c)^z(1+c) + (1-c)^z(1-c) = \\ &= ((1+c)^z + (1-c)^z) + c((1+c)^z - (1-c)^z) > 2, \end{aligned}$$

що і треба було довести.

Далі, доведемо, що $(1+c)^z - (1-c)^z > 2zc$, де $0 < c < 1, z \geq 3$.

Дійсно, $(1+3)^3 - (1-c)^3 = 6c + 2c^3 > 3 \cdot (2c)$.

Припустимо, що $(1+c)^z - (1-c)^z > 2zc$, і доведемо, що $(1+c)^{z+1} - (1-c)^{z+1} > 2(z+1)c$.

Маємо:

$$\begin{aligned} (1+c)^{z+1} - (1-c)^{z+1} &= (1+c)(1+c)^z - (1-c)(1-c)^z = \\ &= ((1+c)^z - (1-c)^z) + c((1+c)^z + (1-c)^z) > 2zc + 2c = 2(z+1)c, \end{aligned}$$

що і треба було довести.

Отже, $(1+c)^z - (1-c)^z > 2zc = \frac{2z}{a}b \geq b \geq 1$, тобто одержали, що $(1+c)^z - (1-c)^z > 1$, що суперечить $(\star\star)$.

Відповідь. $\{(y; y; 1), (3y; y; 2) \mid y \in \mathbb{N}\}$.

14. Розв'язати рівняння $(x+1)^y - x^z = 1$ в натуральних числах x, y, z .

Розв'язання. Якщо $x = 1$, то $y = 1$, z — будь-яке натуральне число. Розглянемо $x \geq 2$. Якщо $z = 1$, то $x + 1 = (x + 1)^y$, тобто $y = 1$, x — довільне натуральне число.

Якщо $z \geq 2$, то $(x + 1)^y = x^z + 1 \geq x^2 + 1 > x + 1$, тобто $y > 1$, $y \geq 2$.

Нехай x — непарне число, тоді за біномом Ньютона маємо

$$(x + 1)^y = ax^2 + yx + 1, \quad a \in \mathbb{N},$$

тому $(x + 1)^y - x^z = 1$, $ax^2 + yx + 1 - x^z = 1$, $y = x(x^{z-2} - a)$, тобто x ділить y .

Нехай $y = bx$, $b \in \mathbb{N}$, тоді маємо $(x + 1)^{bx} - x^z = 1$, $((x + 1)^x)^b - 1 = x^z$. Нехай $(x + 1)^x = c$, тоді $c^b - 1 = x^z$, $(c - 1)(c^{b-1} + \dots + c + 1) = x^z$, тобто $c - 1 \mid x^z$, $(x + 1)^x - 1 \mid x^z$.

Далі за формулою бінома Ньютона маємо:

$$\begin{aligned} (x + 1)^x - 1 &= \left(dx^3 + \frac{x(x-1)}{2}x^2 + x \cdot x + 1 \right) - 1 = x^3 \left(d + \frac{x-1}{2} \right) + x^2 = \\ &= x^3s + x^2, \end{aligned}$$

де $s \in \mathbb{N}$ (оскільки $\frac{x-1}{2}$ — ціле число). Отже, $x^3s + x^2$ ділить x^z , тобто $xs + 1$ ділить x^{z-2} . Однак $xs + 1$ та x — взаємно прості числа, тому $xs + 1 = 1$, $\frac{(x+1)^x - 1}{x^2} = 1$, $(x + 1)^x = 1 + x^2$. Оскільки x — непарне число і $x > 1$, то $x \geq 3$. Але тоді $(x + 1)^x \geq (x + 1)^3 > (x + 1)^2 > x^2 + 1$. Отримали суперечність.

Нехай x — парне число, $x = l - 1$, де l — непарне. Тоді маємо $l^y(l - 1)^z = 1$, причому $l = x + 1 \geq 3$. Якщо $l = 3$, то $y = z = 1$, або $y = 2$, $z = 3$ (див. задачу 3).

Припустимо, що $l \geq 4$. Якщо z — парне число, то $(l - 1)^z = lr + 1$, де $r \in \mathbb{N}$, тому $l^y - (lr + 1) = 1$, $l(l^{y-1} - r) = 2$, тобто $l \mid 2$, що неможливо, оскільки $l \geq 4$.

Отже, z — непарне число, тоді за формулою бінома Ньютона $(l - 1)^z = l^2a + lz - 1$, де $a \in \mathbb{N}$; тоді

$$l^y - (l^2a + lz - 1) = 1, \quad z = l(l^y - a),$$

тобто $l \mid z$.

Нехай $z = lb$, $b \in \mathbb{N}$. Маємо $l^y = (l - 1)^{bl} + 1$.

Нехай $(l - 1)^l = c$, тоді $l^y = c^z + 1 = (c + 1)(c^{z-1} - c^{z-2} + \dots - c + 1)$; отже, $c + 1$ ділить l^y . За формулою бінома Ньютона

$$\begin{aligned}
 (l-1)^l + 1 &= (l^3 d - C_l^2 l^2 + C_l^1 l - 1) + 1 = \left(l^3 d - \frac{l(l-1)}{2} l^2 + l \cdot l - 1 \right) + 1 = \\
 &= l^2 \left(l \left(d + \frac{l-1}{2} \right) + 1 \right) = l^2 (ls + 1),
 \end{aligned}$$

де $s \in \mathbb{N}$. Отже, $l^2(ls+1) \mid l^y$. Звідси випливає, що $ls+1$ ділить l^{y-2} . Однак $ls+1$ та l^{y-2} взаємно прості, тому $ls+1=1$, $\frac{(l-1)^2+1}{l^2}=1$, $(l-1)^l = l^2 - 1$. Оскільки $l \geq 4$, то $(l-1)^l \geq (l(l-2)+1)^2 \geq (2l+1)^2 > l^2 - 1$. Отримали суперечність.

Відповідь. $\{(1; 1; t), (t; 1; 1), (2; 2; 3) \mid t \in \mathbb{N}\}$.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Розв'язати рівняння $2^x + 3^y = 5^z$ в натуральних числах x, y, z .

Відповідь. $\{(1; 1; 1), (4; 2; 2)\}$.

2. Розв'язати рівняння $2^x + 3^y = 7^z$ в натуральних числах x, y, z .

Відповідь. $\{(2; 1; 1)\}$.

3. Розв'язати рівняння $2^x 3^y = 1 + 5^z$ в натуральних числах x, y, z .

Відповідь. $\{(1; 1; 1)\}$.

4. Розв'язати рівняння $x^y - (x+1)^z = 1$ в натуральних числах x, y, z .

Відповідь. $\{(2; 2; 1)\}$.

5. Розв'язати рівняння $x^y - (x^t + 1)^z = 1$ в натуральних числах x, y, z .

Відповідь. $\{(2; 2; 1; 1)\}$.

6. Розв'язати рівняння

$$(x^t + 1)^y - x^z = 1$$

в натуральних числах x, y, z .

Відповідь. $\{(1; 1; 1; 1), (1; 1; n; 1), (n; 1; 1; 1), (2; 3; 3; 1), (1; 1; n; m), (k; 1; n; n)\}$, де $m, n, k \in \mathbb{N}$, $m, n, k \geq 2$.

В'ячеслав Ясінський

Метод нескінченного спуску в олімпіадних задачах з теорії чисел¹

Француз П'єр Ферма (1601–1665) є досить відомим своїми надбаннями в математиці навіть і при тому, що його сучасники, математики-професіонали, вважали аматором цієї справи. Адже за фахом П'єр Ферма — юрист. В університеті Орлеана 1631 р. він отримав учений ступінь з цивільного права, працював адвокатом, а згодом став членом юридичної ради м. Тулузи.

Ферма довів, що мав сильний вплив на світ математики через свої здобутки в теорії чисел та застосовані ним методи їх доведення. Він був одним із перших, хто використовував метод нескінченного спуску як метод доведення математичних тверджень.

Нехай P — речення, у формулювання якого входить натуральне число n , тоді P називають *характеристикою*, що належить до додатного цілого числа n . Через $\{P(n)\}_{n \geq 1}$, позначимо послідовність теорем:

$P(n)$: « n задовольняє характеристику P ».

Розглянемо метод міркувань, запропонований П'єром Ферма, який корисний у доведенні того, що $P(n)$ є хибним твердженням для всіх досить великих натуральних n . Нехай k — натуральне число. Припустимо, що:

- $P(k)$ — хибне твердження;
- кожен раз, коли $P(m)$ — істинне твердження, для натурального $m > k$ має існувати трохи менше натуральне j , $m > j$ і k , для якого $P(j)$ — істинне твердження.

Тоді $P(n)$ є хибним твердженням для всіх натуральних n і k .

Як бачимо, це є *контрапозиція до методу математичної індукції*. Мовою метафор П'єр де Ферма формулював свій метод так: *якщо ви знаєте, що не можете досягти будь-якої сходинки без того, щоб досягти до тієї, що знизу на одну, і, якщо ви також не можете*

¹Журнал «Математика в школі», 2005, №5. — С. 49–52.

досягти найнижчої сходинки, то ви не зможете досягти будь-якої. Він називав це формулювання *методом обмеженого спуску*.

Метод нескінченного спуску може бути сформульований так:

Нехай k — ціле невід’ємне число. Припустимо, що з того, що $P(m)$ — істинне твердження для цілого $m > k$, випливає, що існує менше ціле число j , $m > j > k$, для якого P_j — істинне. Тоді P_n — хибне для всіх $n > k$.

Дійсно, якби існувало таке натуральне n , для якого P_n було б істинне твердження, то ми змогли б отримати нескінченно спадну послідовність $n > n_1 > n_2 > \dots$ натуральних чисел, які мали б бути більші за число k і для кожного з яких твердження P_{n_i} було б істинним твердженням, що не є можливим для невід’ємних цілих чисел (це суперечить аксіомі про найменший елемент системи натуральних чисел: в кожній непорожній множині натуральних чисел існує найменший елемент).

В деяких випадках зручно використовувати ще й таку форму спуску: якщо n_0 — найменше додатне ціле число, для якого P_{n_0} — істинне твердження, тоді P_n є хибні твердження при всіх натуральних $n < n_0$.

Можна сформулювати дві очевидні теореми, які будуть суперечити результатам, до яких призведуть міркування методом спуску:

Теорема 1. *Не існує нескінченної послідовності невід’ємних цілих чисел $n_1 > n_2 > n_3 > \dots$*

Теорема 2. *Якщо послідовність невід’ємних цілих чисел $\{n_i\}$ задовольняє нерівностям $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots$, то існує такий номер i_0 , що $n_{i_0} = n_{i_0+1} = n_{i_0+2} = \dots$*

А тепер розглянемо застосування методу нескінченного спуску до розв’язування задач з теорії чисел, які пропонувалися на математичних олімпіадах різних рівнів.

Задача 1. Розв’язати рівняння $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ в невід’ємних цілих числах x, y, z .

Розв’язання. Доведемо, що $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ — єдиний розв’язок даного рівняння.

Якщо лише одне із невідомих дорівнює нулю, то одержимо суперечність з тим, що числа $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[3]{4}$ — ірраціональні.

Нехай (x_1, y_1, z_1) — розв’язок даного рівняння, де x_1, y_1 і z_1 — натуральні числа. Тоді $x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$. Звідси слідує, що $x_1^3 : 2$, тобто $x_1 : 2$. А це означає, що $x_1 = 2x_2$, де $x_2 \in \mathbb{N}$. Далі одержуємо, що

$8x_2^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$, тобто $4x_2^3 + y_1^3 = 2z_1^3$. Звідси слідує, що $y_1 = 2y_2$, де $y_2 \in \mathbb{N}$. Далі, аналогічно, одержуємо, що $z_1 = 2z_2$, де $z_2 \in \mathbb{N}$ та $x_2^3 + 2y_2^3 = 4z_2^3$, тобто (x_2, y_2, z_2) — «новий» розв'язок даного рівняння, причому $x_1 > x_2$, $y_1 > y_2$ і $z_1 > z_2$. Міркуючи аналогічно, одержуємо, що дане рівняння має безліч розв'язків в натуральних числах (x_n, y_n, z_n) , де $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$, а це суперечить теоремі 1. $\square$

Задача 2. Довести, що не існує натурального числа $n > 1$ такого, що число $\frac{2^n - 1}{n}$ є цілим.

Розв'язання. Нехай існує таке натуральне число $n > 1$ і нехай p_1 — простий дільник числа n , тоді $(2^n - 1) : p_1$. Розглянемо найменше натуральне число $m > 1$ таке, що $(2^m - 1) : p_1$. Таке число існує, бо за малою теоремою Ферма $(2^{p_1-1} - 1) : p_1$. Звідси слідує, що $1 < m \leq p_1 - 1 < p_1$. Доведемо, що $n : m$. Припустимо, що це не так, тоді $n = km + r$, де k, r — невід'ємні цілі числа, $0 < r < m$. Тоді

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{km} \cdot 2^r - 1 = (2^m)^k \cdot 2^r - 1 = \\ &= (2^m - 1 + 1)^k \cdot 2^r - 1 \equiv 2^r - 1 \pmod{p_1}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $(2^r - 1) : p_1$ і $r < m$, що суперечить вибору числа m . Отже, $n : m$ і $1 < m < p_1$. Нехай p_2 — простий дільник числа m , тоді p_2 — простий дільник числа n , $(2^n - 1) : p_2$ і $p_1 > p_2$. Продовжуючи цей «спуск», ми одержимо нескінченну спадну послідовність простих дільників числа n : $p_1 > p_2 > p_3 > \dots$, що суперечить теоремі 1. $\square$

Задача 3. Знайти найбільше значення виразу $m^2 + n^2$, де m і n — натуральні числа ($1 \leq m \leq 1981$, $1 \leq n \leq 1981$) такі, що $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

(XXII Міжнародна математична олімпіада, Вашингтон, США, 1981 р.)

Розв'язання. Покажемо, що число $1597^2 + 987^2$ — найбільше.

Розглянемо всі такі пари натуральних чисел (n, m) , що

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1. \quad (1)$$

Записана рівність не виконується для натуральних n і m при $m > n$, бо у цьому випадку

$$n^2 - m^2 < -1, -mn < -1 \text{ і } n^2 - mn - m^2 < -2.$$

Легко перевірити, що $m = n$ лише при $m = n = 1$.

Нехай (n_0, m_0) — пара натуральних чисел, яка задовольняє (1) і $n_0 > m_0$. Тоді

$$\begin{aligned} 1 &= (n_0^2 - m_0 n_0 - m_0^2)^2 = ((n_0 - m_0)^2 + m_0 n_0 - 2m_0^2)^2 = \\ &= ((n_0 - m_0)^2 + m_0(n_0 - m_0) - m_0^2)^2 = \\ &= (m_0^2 - m_0(n_0 - m_0) - (n_0 - m_0)^2)^2. \end{aligned}$$

А це означає, що тоді і пара натуральних чисел (n_1, m_1) , де $n_1 = m_0$ і $m_1 = n_0 - m_0 > 0$, також задовольняє (1). Аналогічно до попереднього, доводимо, що $n_1 \geq m_1$. Якщо $n_1 > m_1$, то і пара (n_2, m_2) , де $n_2 = m_1$ і $m_2 = n_1 - m_1$, також задовольняє (1). Продовжуючи цей «спуск», ми одержимо, що через скінчене число кроків ми прийдемо до пари $(1, 1)$ (це стверджує теорема 2). Дійсно, послідовність перших (великих) елементів побудованих пар спадає: як показано вище, $n_i > m_i$ і $m_{i+1} = n_i - m_i > 0$. Утворення нової пари (n', m') за описаною процедурою неможливе лише в одному випадку: $n' = m'$ (в цьому випадку $n' - m'$ не є натуральним числом). Тоді $n' = m' = 1$.

Отже, із будь-якої пари (n_0, m_0) , яка задовольняє (1), послідовно застосовуючи перетворення $n_{i+1} = m_i$, $m_{i+1} = n_i - m_i$, одержуємо пару $(1, 1)$. Але, якщо пара (n', m') одержана за допомогою цих перетворень із пари (n, m) , то $n = m' + n'$, $m = n'$. Це означає, що із пари $(1, 1)$ вся послідовність пар, що задовольняють (1), відновлюється однозначно. Звідси слідує також, що послідовності перших, і других компонентів пар, які одержуються із пари $(1, 1)$ за допомогою описаних перетворень, зростають. Тому парою (n, m) , для якої значення $m^2 + n^2$ максимальне при $1 \leq m \leq 1981, 1 \leq n \leq 1981$, є пара, для якої $n \leq 1981$, а $m + n > 1981$. Випишемо послідовно пари за допомогою вказаних перетворень: $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(5, 3)$, $(8, 5)$, $(13, 8)$, $(21, 13)$, $(34, 21)$, $(55, 34)$, $(89, 55)$, $(144, 89)$, $(233, 144)$, $(377, 233)$, $(610, 377)$, $(987, 610)$, $(1597, 987)$, і знайдемо пару, яка нас цікавить $(1597, 987)$.

Зауважимо, що всі пари, які задовольняють (1) — це пари (F_{i+1}, F_i) , де F_i і F_{i+1} — сусідні члени послідовності Фібоначчі, яка визначається за правилами: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ і $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 1$. $\square$

Задача 4. Нехай a і b — натуральні числа такі, що $a^2 + b^2$ ділиться на $ab + 1$ без остачі. Довести, що $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ є квадратом цілого числа.

(XXIX Міжнародна математична олімпіада, 1988 р.)

Розв'язання. Припустимо, що існує така пара чисел (a, b) , для якої виконується умова задачі і при цьому вираз $k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ не є квадратом цілого числа. Помноживши обидві частини цієї рівності на $ab + 1$, одержимо:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= k(ab + 1), \\ a^2 + b^2 - kab &= k. \end{aligned} \quad (2)$$

Оскільки a і b входять до рівності (2) симетрично, то не порушуючи загальності, можна вважати, що $a \geq b$. Розглянемо таке квадратне рівняння $x^2 - kbx + (b^2 - k) = 0$. З (2) випливає, що воно має два корені a і a_1 , причому a_1 — ціле число, бо за формулами Вієта $a + a_1 = kb$, де a і kb — цілі числа. Якщо $a_1 = 0$, то $k = b^2$, що суперечить нашому припущенню. Якщо $a_1 < 0$, то $a_1 \leq -1$, тобто $kb - a \leq -1$. Звідки $a \geq kb + 1$. Далі, помноживши на a , одержимо $a^2 \geq kab + a$, $a^2 - kab \geq a$, $k - b^2 \geq a$. Отже, $k - b^2 \geq a \geq kb + 1$, тобто $k - b^2 \geq kb + 1$, що невірно, бо ліва частина одержаної нерівності менша k , а права — більша k . Протиріччя.

Отже, $a_1 > 0$. За формулами Вієта знаходимо

$$a_1 = \frac{b^2 - k}{a} \leq \frac{a^2 - k}{a} < a.$$

Поклавши $b_1 = b$, одержимо новий розв'язок рівняння (2) в натуральних числах (a_1, b_1) , для якого $a_1 + b_1 < a + b$.

Далі, відштовхуючись від розв'язку (a_1, b_1) , таким же чином будуємо новий розв'язок рівняння (2) в натуральних числах (a_2, b_2) , для якого $a_2 + b_2 < a_1 + b_1$, і т. д. Одержуємо нескінченну послідовність розв'язків

$$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$$

рівняння (2), для якої

$$a + b > a_1 + b_1 > a_2 + b_2 > \dots,$$

що суперечить теоремі 1. □

Отже, k повинно бути квадратом цілого числа. Ще відмітимо, що числа a і b , які задовольняють умовам задачі, існують, наприклад, $a = 2$ і $b = 8$.

Задача 5. Нехай a і b — натуральні числа. Довести, що коли число $\frac{a^2+b^2+a+b+1}{ab}$ — ціле, то воно дорівнює 5.

(Румунія, 1995 р.)

Розв'язання. Припустимо, що існує така пара (a, b) натуральних чисел, що число $\frac{a^2+b^2+a+b+1}{ab} = k$ — ціле і $k \neq 5$, тоді

$$0 = a^2 + b^2 + a + b + 1 - kab. \quad (3)$$

Оскільки a і b входять до рівності (3) симетрично, то не порушуючи загальності, можна вважати, що $a \geq b$. Якщо $a = b$, то одержуємо, що $a(a(k-2)-2) = 1$. Звідки слідує, що $a = 1$ і $k = 5$, а це суперечить припущенню. Аналогічно до попередніх міркувань, розглянувши (3), як квадратне рівняння відносно a , ми знаходимо, що (3) має новий розв'язок (a_1, b_1) , де $a_1 = kb - a - 1$ і $b_1 = b$. Оскільки $a(kb - a - 1) = b^2 + b + 1 > 0$, то $a_1 > 0$, а так як a_1 — ціле, то воно — натуральне. Далі, враховуючи, що $a > b$, то $a \geq b + 1$, тобто

$$a^2 \geq b^2 + 2b + 1 > b^2 + b + 1 = a(kb - a - 1) = aa_1.$$

Звідки слідує, що $a > a_1$ і $a + b > a_1 + b_1$. Здійснюючи цей «спуск» далі, одержимо нескінченну послідовність розв'язків $(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ рівняння (3), для якої $a + b > a_1 + b_1 > a_2 + b_2 > \dots$, що суперечить теоремі 1. $\square$

Вправи для самостійного розв'язування

Задача 1. Знайти всі трійки (x, y, z) натуральних чисел, які є розв'язками рівняння

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0.$$

(Математична олімпіада Німеччини)

Задача 2. Знайти всі цілі x, y, z , які задовольняють рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 0.$$

(Математична олімпіада Південної Кореї)

Задача 3. Розв'язати рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 9u^4$ в цілих числах x, y, z, u .

Задача 4. Розв'язати рівняння $x^2 - y^2 = 2xyz$ в натуральних числах x, y, z .

Задача 5. Знайти всі трійки (x, y, z) цілих чисел, які є розв'язками рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2.$$

Задача 6. Нехай a та b — натуральні числа. Довести, що коли число $\frac{a^2+b^2+1}{ab}$ — ціле, то воно дорівнює 3.

Задача 7. Нехай a та b — натуральні числа. Довести, що коли число $\frac{a+1}{b} + \frac{b}{a}$ — ціле, то воно дорівнює 3.

(Математична олімпіада Румунії)

Задача 8. Знайти всі пари (a, b) натуральних чисел, для яких число $\frac{a^2+b^2+1}{ab+a+b}$ буде цілим.

Задача 9. Знайти всі пари (a, b) натуральних чисел, для яких число $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ буде цілим.

(XLIV Міжнародна математична олімпіада, Токіо, 2003 р.)

Задача 10. Знайти всі пари (m, n) невід'ємних цілих чисел таких, що $(m + n - 5)^2 = 9mn$.

(XLII Вибіркова математична олімпіада США)

В'ячеслав Ясінський

Теорія лишків та її застосування до розв'язування олімпіадних задач¹

У класичній теорії цілих чисел чільне місце посідає так звана *теорія конгруенцій* або *теорія лишків*. Її суть полягає ось у чому.

Якщо взяти будь-яке натуральне число m , то при діленні на нього інших цілих чисел можливі m різних остач (лишків): $0, 1, 2, \dots, m-1$. Ті числа, які при діленні на m дають однакову остачу, об'єднують в один клас. Отже, «з точки зору числа m » всі цілі числа розбиваються на m різних класів. Очевидно, що чим більшим буде число m , тим ширшим буде набір класів. Так, при $m = 1$ одержуємо всього один клас — множину всіх цілих чисел (її позначають $\mathbb{Z}$); при $m = 2$ — два класи: парні і непарні числа і т. д.

Той факт, що два цілих числа a і b дають однакові остачі при їх діленні на натуральне число m , німецький математик *Карл Фрідріх Гаус* запропонував записувати так: $a \equiv b \pmod{m}$ (читається « a » конгруентно « b » за модулем « m »). Цей запис називають *конгруенцією*. Ось приклади

¹Журнал «Математика в школі», 2009, №1. — С. 35–40.

правильних конгруенцій: $-5 \equiv 2 \pmod{7}$, $2006 \equiv 2 \pmod{3}$, $15k + 3 \equiv 3 \pmod{5}$, де k — ціле число.

Щоб упевнитися в конгруентності двох цілих чисел a і b за деяким модулем m , зовсім не обов'язково знаходити остачі від ділення цих чисел на число m кожного з них. Достатньо розглянути їх різницю:

• $a \equiv b \pmod{m}$ тоді і тільки тоді, коли різниця $a - b$ ділиться на m (без остачі).

Конгруенції мають властивості, які схожі із властивостями звичайних рівностей. Відомо, рівності можна додавати одну до одної, множити, віднімати одну від іншої — в результаті одержуємо правильну (істинну) рівність. Те саме справедливе і для конгруенцій:

• якщо довільні цілі числа a, b, c і d такі, що $a \equiv b \pmod{m}$ і $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ і $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Ці властивості легко доводяться, якщо замість конгруенцій розглянути відповідні різниці і застосувати теорію подільності. Доведемо, наприклад, останню властивість. Нехай $a \equiv b \pmod{m}$ і $c \equiv d \pmod{m}$. Тоді $(a - b) : m$ і $(c - d) : m$. Оскільки $ac - bd = a(c - d) + d(a - b)$, то і $(ac - bd) : m$, тобто $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Операція піднесення до степеня з натуральним показником зводиться до багаторазового множення, тому

• якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, де n — натуральне.

Ліву і праву частини рівності можна розділити на один і той самий множник, відмінний від нуля. З конгруенціями так робити, взагалі кажучи, не можна. Однак

• якщо числа c і m взаємно прості та $ac \equiv b \pmod{m}$, то $a \equiv b \pmod{m}$.

З іншого боку, обидві частини конгруенції можна розділити на одне і те саме число одночасно з модулем:

• якщо $ac \equiv bc \pmod{mc}$, то $a \equiv b \pmod{m}$.

Знаючи вказані властивості конгруенцій, можна суттєво спростувати складні арифметичні викладки, якщо нас цікавитиме лише остача від ділення на деяке натуральне число m . Адже в цьому випадку у будь-якому алгебраїчному виразі, одержаному із цілих чисел за допомогою арифметичних дій додавання, віднімання, множення і піднесення до степеня з натуральним показником, можна замінити ці числа на остачі

від ділення на m і при цьому результат не зміниться. Тому урахування «класової структури суспільства» цілих чисел буває корисним при доведенні теорем та розв'язанні деяких олімпіадних задач із теорії чисел.

Теорема Ферма та Ейлера

Розглянемо і доведемо дві теореми, що мають широке застосування при розв'язанні діофантових рівнянь.

Теорема 1 (Мала теорема Ферма). *Число $a^p - a$ ділиться на просте число p при будь-якому натуральному a . Якщо $(a, p) = 1$, то $a^{p-1} - 1$ ділиться на p .*

Доведення. Якщо p при a , то p ділить $a^p - a$. Нехай просте p не ділить a , тобто $(a, p) = 1$. Розглянемо набір чисел $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$. Знайдемо остачі від ділення цих чисел на p :

$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \pmod{p}, \\ 2a &\equiv r_2 \pmod{p}, \\ 3a &\equiv r_3 \pmod{p}, \\ &\dots \\ (p-1)a &\equiv r_{p-1} \pmod{p}, \end{aligned}$$

де всі $r_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, $i = 1, 2, \dots, p-1$.

Оскільки p не ділить a , то всі числа нашого набору не діляться на p , а це означає, що всі $r_i \neq 0$, тобто $1 \leq r_i \leq p-1$. Доведемо, що всі ці остачі попарною різні. Припустимо, що $r_i = r_j$, де $1 \leq i < j \leq p-1$, тоді $ja \equiv ia \pmod{p}$. А це означає, що $ja - ia = (j-i)a$ ділиться на p . Оскільки $(a, p) = 1$, то $j-i$ ділиться на p . Але $0 < j-i < p-1$, тому остання подільність — неможлива.

Таким чином, $(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, p-1$. Тому $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) = r_1 r_2 \dots r_{p-1}$ і, перемноживши попередні конгруенції, одержимо:

$$(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)) a^{p-1} \equiv r_1 r_2 \dots r_{p-1} \pmod{p},$$

а після скорочення:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

що і треба було довести. □

Нехай $\varphi(n)$ позначає кількість натуральних чисел, які менші n і взаємно прості з n . Функцію $\varphi(n)$ називають *функцією Ейлера*.

Теорема 2 (Теорема Ейлера). *Нехай $(a, n) = 1$, тоді $a^{\varphi(n)} - 1$ ділиться на n .*

Доведення. Нехай $k_1, k_2, \dots, k_l$ — натуральні числа, які менші за n і взаємно прості з n , тобто $(k_i, n) = 1$, де $i = 1, 2, \dots, l$ та $l = \varphi(n)$. Розглянемо набір чисел $k_1a, k_2a, k_3a, \dots, k_la$. Знайдемо остачі від ділення цих чисел на n :

$$\begin{aligned} k_1a &\equiv r_1 \pmod{n}, \\ k_2a &\equiv r_2 \pmod{n}, \\ k_3a &\equiv r_3 \pmod{n}, \\ &\dots \\ k_la &\equiv r_l \pmod{n}, \end{aligned}$$

де всі $r_i \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Покажемо, що $(r_i, n) = 1$. Припустимо, що для деякого i : $(r_i, n) \neq 1$, тоді існує просте число p , яке ділить числа r_i та n . Отже, p ділить k_i , або p ділить a , що неможливо, оскільки $(k_i, n) = 1$ і $(a, n) = 1$. Таким чином, $(r_i, n) = 1$ для всіх $i = 1, 2, \dots, l$.

Покажемо, що всі r_i попарно різні. Припустимо, що $r = r_j$, де $1 \leq i < j \leq l$, тоді $k_ja \equiv k_i a \pmod{n}$, а це означає, що різниця $k_ja - k_i a = (k_j - k_i)a$ ділиться на n . Оскільки $(a, n) = 1$, то $k_j - k_i$ ділиться на n . Оскільки $0 < k_i < n$ і $0 < k_j < n$, тобто $-n < k_j - k_i < n$, $-1 < \frac{k_j - k_i}{n} < 1$, то $\frac{k_j - k_i}{n} = 0$. Звідси випливає, що $k_j = k_i$, що неможливо, оскільки всі $k_1, \dots, k_l$ попарно різні.

Таким чином, всі r_i попарно різні.

Оскільки числа $r_1, \dots, r_l$ взаємно прості і попарно різні, то вона є деякою перестановкою чисел $k_1, \dots, k_l$, тобто $r_1 \cdot \dots \cdot r_l = k_1 \cdot \dots \cdot k_l$. Перемножимо всі попарні конгруенції, одержимо:

$$k_1 \cdot \dots \cdot k_l \cdot a^l \equiv r_1 \cdot \dots \cdot r_l \pmod{n},$$

а після скорочення одержимо:

$$a^l \equiv 1 \pmod{n}.$$

Оскільки $l = \varphi(n)$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, що і треба було довести. $\square$

Зауваження. Очевидно, що коли p — просте число, то всі числа $1, 2, 3, \dots, p-1$ взаємно прості з p , тому $\varphi(p) = p-1$. Отже мала теорема Ферма є частинним випадком теореми Ейлера.

Теорема 3. Якщо $n^a - 1$ ділиться на $mn^b - 1$, то a ділиться на b , де n , a і b — натуральні числа, які задовольняють умовам $n > 1$, $a \geq b \geq 1$.

Доведення. Якщо $a = b$, то твердження теореми виконується. Нехай $a > b$. Розділимо a на b з остачею, тоді одержимо, що $a = b \cdot c + r$, де c — ціле невід'ємне число, $r \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Оскільки $n^b \equiv 1 \pmod{n^b - 1}$, то за властивістю конгруенцій одержимо:

$$(n^b)^c \equiv 1^c \pmod{n^b - 1},$$

тобто $n^{bc} \equiv 1 \pmod{n^b - 1}$.

За умовою теореми

$$\begin{aligned} n^a &\equiv 1 \pmod{n^b - 1}, \\ n^{bc+r} &\equiv 1 \pmod{n^b - 1}, \\ n^{bc} \cdot n^r &\equiv 1 \pmod{n^b - 1}. \end{aligned}$$

Оскільки $n^{bc} \equiv 1 \pmod{n^b - 1}$, з останньої конгруенції одержуємо:

$$n^r \equiv 1 \pmod{n^b - 1},$$

тобто $(n^r - 1) : (n^b - 1)$. Але $0 \leq n^r - 1 < n^b - 1$, то остання подільність можлива лише тоді, коли $n^r - 1 = 0$, тобто $r = 0$. А це означає, що $a = bc$, тобто a ділиться на b , що і треба було довести. $\square$

Задачі математичних олімпіад

Задача 1. Доведіть, що рівняння

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+2001)^2 = y^2$$

не має розв'язків у цілих числах.

(Математична олімпіада Угорщини, 2001 р.)

Розв'язання. Міркування за модулем 2 не приведе до одержання результату. Тому спробуємо застосувати міркування за модулем 3.

Нехай існують такі цілі числа x та y , які задовольняють задану рівність. Нехай $x + 1001 = z$, тоді одержимо:

$$(z-1000)^2 + \dots + (z-1)^2 + z^2 + (z+1)^2 + \dots + (z+1000)^2 = y^2.$$

або

$$2001z^2 + 2(1^2 + 2^2 + \dots + 1000^2) = y^2.$$

Використовуючи формулу для обчислення суми квадратів перших m натуральних чисел:

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

одержуємо:

$$2001z^2 + 2 \cdot \frac{1001 \cdot 1001 \cdot 2001}{6} = y^2,$$

що еквівалентно рівності

$$2001z^2 + 1000 \cdot 1001 \cdot 667 = y^2.$$

Оскільки 2001 ділиться на 3, а $1000 \equiv 667 \equiv 1 \pmod{3}$, $1000 \equiv 2 \pmod{3}$, то ліва частина останньої рівності конгруентна 2 за модулем 3.

Доведемо, що $y^2 \not\equiv 2 \pmod{3}$. Дійсно, якщо $y \equiv 0 \pmod{3}$, то $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$; якщо $y \equiv \pm 1 \pmod{3}$, то $y^2 \equiv 1 \pmod{3}$, що і треба було довести. Одержане протиріччя і доводить, що задане рівняння немає розв'язків у цілих числах.

Задача 2. Знайдіть усі пари простих чисел (p, q) таких, що $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.

(Всеросійська математична олімпіада, 1997р.)

Розв'язання. Міркування за модулем 2 не приведе до одержання результату. Тому спробуємо застосувати міркування за модулем 3.

Нехай спочатку p і q не діляться на 3. Якщо $p \equiv q \pmod{3}$, то ліва частина рівності

$$p^3 - q^5 \equiv q^3 - q^5 \equiv q^3(1 - q)(1 + q) \equiv 0 \pmod{3},$$

а права частина рівності

$$(p + q)^2 \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Якщо $p \not\equiv q \pmod{3}$, то $(p + q)^2 \equiv 0 \pmod{3}$, а $p^3 - q^5 \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Нехай тепер p ділиться на 3. Оскільки воно просте, то $p = 3$. Тоді із даної рівності випливає, що $q^5 < 27$, чого бути не може при простих q .

Нехай нарешті, q ділиться на 3, тоді $q = 3$ і $p^3 - 243 = (p + 3)^2$. Після розкриття дужок, зведення подібних додатків і винесення спільного множника за дужки одержуємо: $p(p^2 - p + 6) = 252$. Звідси випливає,

що p — простий дільник числа 252, тобто 2, 3, або 7. Перевірка залишає лише $n = 7$.

Відповідь. $(p, q) = (7, 3)$.

Як бачимо, потрібні нам міркування проводилися за модулем 3.

Задача 3. Довести, що рівняння $x^5 - y^2 = 4$ не має розв'язків у цілих числах.

(Балканіада)

Розв'язання. Проведемо міркування за модулем 11. За малою теоремою Ферма $x^{11} \equiv x \pmod{11}$. Звідси випливає, що $x^{10} \equiv 0 \pmod{11}$ (коли $x \equiv 0 \pmod{11}$), або $x^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ (в усіх інших випадках). Отже, $x^5 \equiv -1, 0$, або $1 \pmod{11}$, а $x^5 - 4 \equiv 6, 7$, або $8 \pmod{11}$ відповідно.

З іншого боку, квадрат цілого числа за модулем 11 дає такі остачі: $y^2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5$, або $9 \pmod{11}$ (для цього розгляньте конгруєнції $y \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5 \pmod{11}$).

Оскільки ліва і права частини рівності $x^5 - 4 = y^2$ дають різні остачі від ділення на 11, то таке рівняння немає розв'язків у цілих числах.

Задача 4. Знайдіть усі прості p , при яких система рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 = p + 1, \\ 2y^2 = p^2 + 1 \end{cases}$$

має розв'язок у цілих числах x, y .

(Математична олімпіада Німеччини)

Розв'язання. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $x \geq 0$ та $y \geq 0$. З того, що $2x^2 = p + 1$ випливає, що p — непарне число. Оскільки $2x^2 \equiv 1 \equiv 2y^2 \pmod{p}$, то $x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$. Звідси випливає, що $x \equiv \pm y \pmod{p}$. Оскільки $p^2 + 1 > p + 1$, то $y > x > 0$. Якщо $y \geq p$, то $p^2 + 1 = 2y^2 \geq 2p^2$, що неможливо. Отже, $0 < x < y < p$. Тому

$$p^2 + 1 = 2(p - x)^2 = 2p^2 - 4px + p + 1,$$

тобто $p = 4x - 1$. Підставивши одержаний результат у перше рівняння системи, одержимо:

$$2x^2 = 4x,$$

тобто, враховуючи обмеження, знаходимо: $x = 2$, а $p = 7$.

При $p = 7$ система має розв'язок у цілих числах, наприклад $(2, 5)$.

Відповідь. $p = 7$.

Задача 5. Знайти всі натуральні $m \geq 2$ і $n \geq 2$ такі, що число $\frac{m^{2 \cdot 3^n} + m^{3^n} + 1}{n}$ — ціле.

(Математична олімпіада Болгарії, 1997)

Розв’язання. Нехай m і n задовольняють умови задачі. Тоді n — число непарне і взаємно просте з числом m , тобто $(m, n) = 1$. Якщо $n = 3$, то $m \equiv 1 \pmod{3}$, оскільки для $m \equiv -1 \pmod{3}$, маємо:

$$m^{2 \cdot 3^n} + m^{3^n} + 1 \equiv 1 - 1 + 1 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Нехай $n > 3$. Тоді маємо, що $m^{3^n} \not\equiv 1 \pmod{n}$, бо інакше маємо:

$$m^{2 \cdot 3^n} + m^{3^n} + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{n},$$

і тому $n \mid 3$, що неможливо.

Оскільки

$$m^{2 \cdot 3^n} + m^{3^n} + 1 = \frac{m^{3^{n+1}} - 1}{m^{3^n} - 1},$$

то $m^{3^{n+1}} \equiv 1 \pmod{n}$.

Далі застосуємо міркування, які називають *принцип крайнього*. Нехай k — найменше ціле число, для якого $m^k \equiv 1 \pmod{n}$, тоді за теоремою 3 одержуємо: $k \mid 3^{n+1}$ і $k \mid 3^n$, тобто $k = 3^{n+1}$.

Нехай $\varphi(n)$ — функція Ейлера. Оскільки $(m, n) = 1$, то за теоремою Ейлера одержуємо:

$$m\varphi(n) \equiv 1 \pmod{n}.$$

Тому з припущення випливає, що $k \leq \varphi(n)$. Таким чином, $3^{n+1} \leq \varphi(n) \leq n - 1$.

Останній нерівності не задовольняє жодне натуральне число $n > 3$. Одержане протиріччя і доводить, що при $n > 3$ твердження задачі не виконується.

Таким чином, умові задачі задовольняють $n = 3$ і всі $m \geq 4$, для яких $m \equiv 1 \pmod{3}$.

Задача 6. Нехай m таке натуральне число, що $\frac{3^{2^m} + 1}{2^{m+1} + 1}$ — ціле число. Доведіть, що $2^{m+1} + 1$ — просте число.

(Відбіркові завдання до Міжнародної математичної олімпіади, Україна, 2004 р.)

Розв’язання. Припустимо, що число $2^{m+1} + 1$ не є простим. Тоді існує таке просте число p , що $2 \leq p < 2^{m+1} + 1$ і $(2^{m+1} + 1) : p$. Зауважимо, що $p \neq 2$, оскільки $2^{m+1} + 1$ — число непарне.

Нехай $A = \frac{3^{2m+1}}{2^{m+1}+1}$ є цілим числом, тоді число

$$B = A \cdot (3^{2^m} - 1) = \frac{3^{2^{m+1}} - 1}{2^{m+1} + 1}$$

також є цілим. Звідси випливає, що $(3^{2^{m+1}} - 1) : (2^{m+1} + 1)$. Оскільки $(2^{m+1} + 1) : p$, за припущенням, то $(3^{2^{m+1}} - 1) : p$. Крім того, за малою теоремою Ферма, $(3^{p-1} - 1) : p$. Зауважимо, що $p > 3$, бо при $p = 3$ не виконуватиметься умова задачі $(3^{2^m} + 1) : p$. Отже, $(3, p) = 1$.

Далі застосуємо міркування, які називають *принцип крайнього*. Розглянемо тепер найменше натуральне число a , для якого $(3^a - 1) : p$. Тоді за теоремою $3(p-1) : a$ і $2^{m+1} : a$. Таким чином, $a = 2^k$, де $k \leq m+1$. Якщо $k = m+1$, то з нерівності $2 \leq p < 2^{m+1} + 1$ випливає, що $0 < p-1 < 2^{m+1}$ і $p-1$ не ділиться на $a = 2^{m+1}$. Тому $k \leq m$, тобто $3^{2^k} - 1$ ділиться на p або $3^{2^k} \equiv 1 \pmod{p}$.

За властивостями конгруенцій маємо:

$$(3^{2^k})^{2^{m-k}} \equiv (1)^{2^{m-k}} \pmod{p},$$

тобто $3^{2^m} - 1$ ділиться на p . Оскільки $(3^{2^m} + 1) : (2^{m+1} + 1)$, тобто $3^{2^m} + 1$ ділиться на p , то $2 = (3^{2^m} + 1) - (3^{2^m} - 1)$ ділиться на p , що суперечить нерівності $p > 2$. Одержане протиріччя і доводить, що $2^{m+1} + 1$ є простим числом.

Задача 7. Нехай n — натуральне число, $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ — чотири його найменші дільники та $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$. Знайдіть усі такі n .

(Математична олімпіада Ірану, 1999 р.)

Розв'язання. Легко довести, що $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$, якщо x — парне число, і $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$, якщо x — непарне число.

Якщо n — непарне число, то всі його дільники будуть непарними, і тому $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$. Звідси випливає, що n ділиться на 4, тобто парне. Суперечність.

Таким чином, n — парне. Тому $d_1 = 1$, а $d_2 = 2$. Якщо n ділиться на 4, тоді $n \equiv 1 + 0 + d_3^2 + d_4^2 \not\equiv 0 \pmod{4}$. Суперечність. Отже, n — парне і не ділиться на 4. Тоді $\{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \{1, 2, p, q\}$ або $\{1, 2, p, 2p\}$, де p і q — непарні прості числа. У першому випадку одержуємо:

$$n \equiv 1^2 + 2^2 + p^2 + q^2 \equiv 1 + 0 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{4},$$

тобто n при діленні на 4 дає в остачі 3 (є непарним числом), що суперечить припущенню. У другому випадку $n \equiv 1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 = 5(1 + p^2)$ і тому $5 \mid n$, тобто $p = d_3 = 5$, а $n = 130$.

Відповідь. $n = 130$.

Задача 8. Нехай n — натуральне, $n \geq 2$. Доведіть, що для кожного простого числа p число $\sqrt[n]{2^p + 3^p}$ не є цілим числом.

(Математична олімпіада Італії, 1999 р.)

Розв'язання. Нехай існує таке натуральне число a , що $a = \sqrt[n]{2^p + 3^p}$, тоді $2^p + 3^p = a^n$. Якщо $p = 2$, то $a^n = 13$, що неможливо при будь-яких натуральних a і $n \geq 2$. Отже, p — непарне число і тому $5 \mid (2^p + 3^p)$ (ми скористалися тим, що $2 \equiv -3 \pmod{5}$, і тому $2^p \equiv (-3)^p \equiv -3^p \pmod{5}$, тобто $2^p + 3^p \equiv 0 \pmod{5}$). Оскільки $n > 1$, то $25 \mid (2^p + 3^p)$.

Однак

$$2^p + (5 - 2)^p \equiv 2^p + (C_p^1 \cdot 5 \cdot (-2)^{p-1} + (-2)^p) \equiv 5p \cdot 2^{p-1} \pmod{25},$$

тому $5 \mid p$, тобто $p = 5$. Але при $p = 5$ одержуємо, що $a^n = 2^5 + 3^5 = 5^2 \cdot 11$. А це неможливо, оскільки a^n ділиться на 11 і не ділиться на 121.

Задача 9. Знайти всі розв'язки (x, y, z) рівняння

$$(x + 1)^{y+1} + 1 = (x + 2)^{z+1}$$

в натуральних числах.

(Тайванська математична олімпіада, 1999 р.)

Розв'язання. Нехай $a = x + 1$, $b = y + 1$, $c = z + 1$, тоді $a \geq 2$, $b \geq 2$, $c \geq 2$ і $a^b + 1 = (a + 1)^c$. Перепишемо це рівняння в такому вигляді

$$((a + 1) - 1)^b + 1 = (a + 1)^c.$$

Звідки одержуємо: $(-1)^b + 1 \equiv 0 \pmod{a + 1}$, тобто b — непарне число. Крім того, одержуємо:

$$C_b^1 (a + 1) (-1)^{b-1} + (-1)^b + 1 \equiv 0 \pmod{(a + 1)^2}.$$

А це означає, що $(a + 1) \mid b$ і a — парне число. Далі перепишемо рівність $a^b + 1 = (a + 1)^c$ за модулем a^2 :

$$1 \equiv C_c^1 a + 1 \pmod{a^2},$$

$$ca \equiv 0 \pmod{a^2},$$

$$c \equiv 0 \pmod{a}.$$

Остання конгруенція означає, що $a \mid c$ і тому c — парне число. Отже, $a = 2a_1$ і $c = 2c_1$, де a_1, c_1 — натуральні. Тоді рівність $a^b + 1 = (a + 1)^c$ можна переписати у такому вигляді:

$$2^b a_1^b = a^b = (a + 1)^c - 1 = ((a + 1)^{c_1} - 1)((a + 1)^{c_1} + 1).$$

Використовуючи формулу $\text{НСД}(a, b) = \text{НСД}(a, b - a)$, де $b > a$, одержуємо, що $\text{НСД}\left((a + 1)^{c_1} - 1; (a + 1)^{c_1} + 1\right) = 2$. Оскільки число $(a + 1)^{c_1} - 1$ ділиться на $2a_1$, то із останнього представлення одержуємо:

$$\begin{cases} (a + 1)^{c_1} - 1 = 2a_1^b, \\ (a + 1)^{c_1} + 1 = 2^{b-1}. \end{cases}$$

Звідси одержуємо, що $2^{b-1} > 2a_1^b$, тобто $a_1 = 1$. Далі: перше рівняння системи дає $c_1 = 1$, а потім друге дає $b = 3$. Таким чином, одержуємо єдиний розв'язок даного рівняння: $(x, y, z) = (1, 2, 1)$.

Задача 10. Нехай a і b такі натуральні числа, що при всіх натуральних n число $b^n + n$ ділиться на число $a^n + n$. Доведіть, що $a = b$.

(Відбори на Міжнародну математичну олімпіаду, Румунія, 2005 р.)

Розв'язання. Припустимо, що $a \neq b$. При $n = 1$ одержуємо, що $b + 1$ ділиться на $a + 1$. Звідси випливає, що $b > a$. Нехай p — просте число, $p > b$. Розглянемо таке натуральне число n , що $n \equiv 1 \pmod{p-1}$ і $n \equiv -a \pmod{p}$ (таке число існує, наприклад, $n \equiv (a + 1)(p - 1) + 1$). Тоді за малою теоремою Ферма одержуємо:

$$a^n = a \cdot (a^{p-1})^{a+1} \equiv a \cdot (1)^{a+1} = a \pmod{p},$$

тобто $a^n + n \equiv a \pmod{p}$. Оскільки $b^n + n$ ділиться на $a^n + n$, то $b^n + n \equiv 0 \pmod{p}$.

Далі, використовуючи малу теорему Ферма, аналогічно знаходимо:

$$b^n + n = b \cdot (b^{p-1})^{a+1} + n \equiv b - a \pmod{p}.$$

Звідси випливає, що $(b - a) : p$, що неможливо, бо $0 < b - a < b < p$. Одержане протиріччя і доводить, що $a = b$.

Задача 11. Знайти всі прості непарні p , які є дільниками числа

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + 2004^{p-1}.$$

(Відбори на Міжнародну математичну олімпіаду, Болгарія, 2004 р.)

Розв'язання. Відомо, що $k^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$, якщо k ділиться на p , і $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, якщо k не ділиться на p . Отже, за умовою задачі одержуємо:

$$0 \equiv 1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + 2004^{p-1} \equiv 0 \cdot \left[\frac{2004}{p} \right] + 1 \cdot \left(2004 - \left[\frac{2004}{p} \right] \right) \pmod{p},$$

тобто

$$2004 \equiv \left[\frac{2004}{p} \right] \pmod{p}, \quad (1)$$

причому $p < 2004$. Нехай $2004 = qp + r$, де q — натуральне, r — ціле, $0 \leq r \leq p - 1$. Оскільки $\left[\frac{2004}{p} \right] = \left[q + \frac{r}{p} \right] = q$, то конгруенція (1) еквівалентна такій $r \equiv q \pmod{p}$.

Для $q < p$ ця конгруенція дає: $r = q$. Тоді $2004 = (p+1)q \leq (p+1)(p-1) \equiv p^2 - 1$, тобто $p \geq 47$. Оскільки $p+1$ — дільник $2004 = 3 \cdot 4 \cdot 167$, то безпосереднім перебором знаходимо, що $p = 2003$.

Для $q \geq p$ одержуємо: $2004 \geq qp \geq p^2$, тобто $p \leq 47$. Безпосередня перевірка в (1) дає ще рівно одне значення $p = 17$. $\square$

Нижче пропонуємо читачеві розв'язати самостійно деякі задачі, які пропонувалися на математичних олімпіадах у різних країнах. Спроби розв'язувати їх без теорії конгруенцій можуть бути марними, а використовуючи цю теорію, ми сподіваємося, що читачі впораються з ними.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1. Доведіть, що рівняння

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+99)^2 = y^z$$

не має розв'язків у цілих числах x, y, z , де $z > 1$.

(Математична олімпіада Угорщини, 1999 р.)

Задача 2. Знайти всі пари натуральних чисел (x, y) , для яких виконується рівність $x^2 - y! = 2001$.

(Математична олімпіада США, 2001 р.)

Задача 3. Довести, що рівняння $x^3 + y^4 = 7$ не має розв'язків у цілих числах.

(Балканіада)

Задача 4. Знайти всі пари натуральних чисел (x, y) , для яких виконується рівність $3^x - 2^y = 7$.

(Математична олімпіада Білорусії, 1998 р.)

Задача 5. Розв'язати в цілих невід'ємних числах рівняння

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 15\,999.$$

(VIII USA Mathematical Olympiad)

Задача 6. Знайти всі пари цілих чисел (x, y) , для яких виконується рівність

$$x^3 - 4xy + y^3 = -1.$$

(Математична олімпіада Румунії, 1997 р.)

Задача 7. Знайти всі трійки невід'ємних цілих чисел, для яких виконується рівність $5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z$.

(Математична олімпіада Болгарії, 2000 р.)

Задача 8. Доведіть, що рівняння $4xy - x - y = z^2$ немає розв'язків в натуральних числах.

(XXV IMO Shortlist)

Задача 9. Доведіть, що система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = z^2, \\ 6x^2 + y^2 = t^2, \end{cases}$$

не має розв'язків у цілих ненульових числах.

Задача 10. Знайдіть усі пари (a, b) натуральних чисел, для яких виконується рівність $a^{b^2} = b^a$.

(XXXVII IMO)

Література

1. Виноградов І. М. Основи теорії чисел. — М. : Наука, 1981.
2. Базилев Д. Ф. Діофантові рівняння. — Мінськ : НТЦ «АПИ», 1999.
3. Andreescu T., Andrica D. An introduction to Diophantine Equations. Zalau : GIL, 2002.
4. Ясінський В. А. Метод біноміальних перетворень при розв'язуванні показникових рівнянь у цілих числах // Математика в школі — 2005, №9.

В'ячеслав Ясінський

Новітні технології доведення нерівностей многочленів з трьома змінними¹

Вивчаючи сучасні матеріали зарубіжних математичних олімпіад, ми помітили, що школярі країн, які виборюють медалі на міжнародних математичних олімпіадах, володіють новітніми технологіями доведення різноманітних математичних олімпіадних задач, зокрема доведеннями нерівностей.

Ми хочемо ознайомити наших читачів саме з такими методами доведення нерівностей многочленів із трьома змінними. Але спочатку домовимося про спеціальні міжнародні позначення (у вітчизняній літературі їх майже не застосовують).

Нехай $P(x, y, z)$ — функція від трьох змінних x , y і z . Тоді за означенням:

$$\sum_{cyc} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y),$$

$$\begin{aligned} \sum_{sym} P(x, y, z) &= P(x, y, z) + P(x, z, y) + P(y, x, z) + P(y, z, x) + \\ &+ P(z, x, y) + P(z, y, x). \end{aligned}$$

Наприклад,

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} x^3y &= x^3y + y^3z + z^3x, & \sum_{sym} x^3 &= 2(x^3 + y^3 + z^3), \\ \sum_{sym} x^2y &= x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y, & \sum_{sym} xyz &= 6xyz. \end{aligned}$$

Сподіваємося, що наші читачі з легкістю оволодіють новими позначеннями для вищезначених сум і надалі з легкістю користуватимуться ними. Зокрема, зазначимо такий зв'язок між ними:

$$\sum_{sym} P(x, y, z) = \sum_{cyc} (P(x, y, z) + P(x, z, y)).$$

¹Журнал «Математика в школі», 2006, №8. — С. 26–32.

Нерівність Шура та її застосування

Ісай Шур народився 10 січня 1875 року в м. Могильові (нині Білорусь). Він відвідує гімназію в Лібау (нині — Ліепая, Латвія) і в 1894 році вступає до Берлінського університету, де в 1901 році йому присвоєно вчений ступінь *doctorate summa cum Laude*.

З 1911 по 1916 роки Шур працював доцентом у Бонні, а потім у Берлінському університеті, де в 1919 році йому присвоїли вчене звання професора. В 1933–1935 роках його становище в країні погіршилося і в 1935 році нацистська влада примусила його піти у відставку. В 1936 році його запросила до себе Технічна школа Цюриха.

У 1922 р. Шура обирають членом Пруської академії наук, він також був іноземним членом Академії наук Радянського Союзу та академій Лейпцига, Галле і Геттінгена.

В 1936 році, у зв'язку з погіршенням здоров'я, Шур емігрує до Палестини. Його стан здоров'я погіршується і через два роки, 10 січня 1941 року, в день свого 66-річчя він помирає, залишивши усім нам свої чудові математичні здобутки.

Розглянемо теорему, яка носить ім'я цього видатного німецького математика.

Теорема 1. *Нехай x, y, z — дійсні невід'ємні числа. Тоді для будь-якого дійсного $\lambda > 0$ виконується така нерівність*

$$\sum_{\text{сис}} x^\lambda (x - y)(x - z) \geq 0,$$

тобто в «розгорнутому» вигляді ця нерівність має вигляд:

$$x^\lambda (x - y)(x - z) + y^\lambda (y - z)(y - x) + z^\lambda (z - x)(z - y) \geq 0.$$

Доведення. Оскільки ця нерівність є симетричною відносно своїх змінних, то, не порушуючи загальності, будемо вважати, що $x \geq y \geq z$. Перепишемо ліву частину цієї нерівності у вигляді:

$$(x - y)(x^\lambda (x - z) - y^\lambda (y - z)) + z^\lambda (x - z)(y - z) \geq 0,$$

оскільки за припущенням $x \geq y \geq z \geq 0$ і тому виконуються такі нерівності $x^\lambda \geq y^\lambda$, $x - z \geq y - z \geq 0$, тобто $x^\lambda (x - z) - y^\lambda (y - z) \geq 0$, а також $x - y \geq 0$ і $z^\lambda (x - z)(y - z) \geq 0$, що і треба було довести.

□

Задача 1. Доведіть, що для будь-яких дійсних невід'ємних чисел x , y і z виконується нерівність

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

Розв'язання. Розглянемо нерівність Шура:

$$\sum_{cyc} x(x-y)(x-z) \geq 0.$$

Вона еквівалентна таким нерівностям

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} (x^3 - x^2y - x^2z + xyz) &\geq 0, \\ \sum_{cyc} x^3 + \sum_{cyc} xyz &\geq \sum_{cyc} (x^2y + x^2z). \end{aligned}$$

Остання нерівність і є тією нерівністю, яку потрібно було довести. $\square$

Задача 2. Нехай x, y, z — невід'ємні дійсні числа такі, що $x+y+z=1$. Доведіть, що виконується така нерівність

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

(XXV ММО, Прага, Чехословаччина, 1984 р.)

Розв'язання. Оскільки $x+y+z=1$, то наша нерівність еквівалентна такій нерівності

$$0 \leq (xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz \leq \frac{7}{27}(x + y + z)^3.$$

(Ми «вирівняли» степінь усіх членів нерівності, тобто зробили її рівною трьом).

Спочатку доведемо ліву нерівність

$$(xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz \geq 0.$$

Розкривши дужки і звівши подібні доданки, вона запишеться так

$$xyz + \sum_{sym} x^2y \geq 0.$$

Ця нерівність є очевидною, оскільки x, y, z — невід'ємні дійсні числа.

Тепер доведемо праву нерівність

$$\frac{7}{27}(x + y + z)^3 \geq (xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz.$$

Розглянемо різницю між лівою й правою частинами. Розкривши дужки і звівши подібні доданки, вона запишеться так

$$7 \sum_{cyc} x^3 + 15xyz - 6 \sum_{sym} x^2y \geq 0.$$

Щоб довести цю нерівність, зробимо такі перетворення її лівої частини:

$$\begin{aligned} 7 \sum_{cyc} x^3 + 15xyz - 6 \sum_{sym} x^2y &= \\ &= \left(2 \sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2y \right) + 5 \left(3xyz + \sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2y \right) + \sum_{sym} x^2y. \end{aligned}$$

Оскільки за *нерівністю Коші* виконується така нерівність

$$\sum_{cyc} x^3 \geq 3xyz,$$

то

$$2 \sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2y \geq 3xyz + \sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2y \geq 0,$$

що і треба було довести (остання нерівність — результат першої задачі).

□

Задача 3. Додатні числа a, b, c такі, що $abc = 1$. Доведіть, що виконується така нерівність

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b} \right) \left(b - 1 + \frac{1}{c} \right) \left(c - 1 + \frac{1}{a} \right) \leq 1.$$

(XLI ММО, Тайнджон, Південна Корея, 2000 р.)

Розв'язання. Оскільки $abc = 1$, то можна зробити нашу нерівність однорідною:

$$\left(a - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{b} \right) \left(b - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{c} \right) \left(c - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{a} \right) \leq abc.$$

Введемо заміну: $a = x^3, b = y^3, c = z^3$, де $x > 0, y > 0, z > 0, xyz = 1$ і наша нерівність запишеться так:

$$\left(x^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{y^3} \right) \left(y^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{z^3} \right) \left(z^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{x^3} \right) \leq x^3 y^3 z^3.$$

Звідки одержуємо:

$$\begin{aligned} \left(x^3 - xyz + \frac{x^2 z^2}{y}\right) \left(y^3 - xyz + \frac{y^2 x^2}{z}\right) \left(z^3 - xyz + \frac{z^2 y^2}{x}\right) &\leq x^3 y^3 z^3, \\ x \left(x^2 - yz + \frac{xz^2}{y}\right) y \left(y^2 - zx + \frac{yx^2}{z}\right) z \left(z^2 - xy + \frac{zy^2}{x}\right) &\leq x^3 y^3 z^3, \\ (x^2 y - y^2 z + z^2 x) (y^2 z - z^2 x + x^2 y) (z^2 x - x^2 y + y^2 z) &\leq x^3 y^3 z^3. \end{aligned}$$

Далі розкриваємо дужки, зводимо подібні доданки і, розташували їх по обидва боки нерівності так. Щоб їхні коефіцієнти були додатними, одержуємо:

$$3x^3 y^3 z^3 + \sum_{cyc} x^6 y^3 \geq \sum_{cyc} x^4 y^4 z + \sum_{cyc} x^5 y^2 z^2$$

або

$$3(x^2 y)(y^2 z)(z^2 x) + \sum_{cyc} (x^2 y)^3 \geq \sum_{sym} (x^2 y)^2 (y^2 z).$$

Ця нерівність є результатом першої задачі (наслідком із нерівності Шура) відносно змінних $u = x^2 y$, $v = y^2 z$ і $w = z^2 x$. $\square$

Нерівність Мюрхеда та її застосування

Роберт Франклін Мюрхед народився 22 січня 1860 р. неподалік від Глазго (Шотландія). В 1876–1881 рр. навчався в Університеті Глазго й отримав ступінь магістра гуманітарних наук і бакалавра природничих наук із найвищими оцінками з математики й натурфілософії. Уже маючи вчений ступінь, він відвідує коледж Св. Катерини в Кембриджі, де в 1886 р. отримує премію Сміта. Після річного навчання в Геттінгені Мюрхед повертається до Британії і займається викладацькою діяльністю. Декілька разів без успіху добивався професури і зрештою влаштувався в 1893 р. у Глазго як репетитор з математики, фізики й техніки. В 1900 р. у Глазго він засновує вчительський коледж Глазго і працює директором цього коледжу до самої смерті в 1941 р.

Р. Мюрхеда обирали членом Единбурзького математичного товариства на його другій сесії (1884 р.), потім президентом цього товариства, в 1889 і 1909 рр. Він був активним поборником соціалізму, довгий час був членом Ради Шотландської національної партії і деякий час працював редактором партійного органу «Незалежні шотландці».

Його математичний спадок широко використовують світові математики у своїх наукових працях. Розглянемо один із його шедеврів — *мажоризацію многочленів*.

Теорема 2. Нехай $(a_1, a_2, a_3) \succ (b_1, b_2, b_3)$, тобто a_1, a_2, a_3 і b_1, b_2, b_3 — такі дійсні числа, що

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0,$$

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 0,$$

$$a_1 \geq b_1, \quad a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2, \quad a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

Тоді для будь-яких додатних дійсних чисел x, y і z виконується така нерівність

$$\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}.$$

Доведення. Розглянемо два випадки.

1) Нехай $b_1 \geq a_2$, тоді $a_1 \geq a_1 + a_2 - b_1$ і $a_1 \geq b_1$, тобто $a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1)$. Оскільки $a_1 = \max(a_1, a_2)$, то $\max(a_1, a_2) \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1)$.

Крім того, $a_1 + a_2 - b_1 \geq b_1 + a_3 - b_1 = a_3$ і $a_1 + a_2 - b_1 \geq b_2 \geq b_3$, тобто $\max(a_1 + a_2 - b_1, a_3) \geq \max(b_2, b_3)$. Таким чином, використовуючи ідею доведення теореми Шура, одержуємо

$$\begin{aligned} \sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} &= \sum_{cyc} z^{a_3} (x^{a_1} y^{a_2} + x^{a_2} y^{a_1}) \geq \\ &\geq \sum_{cyc} z^{a_3} (x^{a_1+a_2-b_1} y^{b_1} + x^{b_1} y^{a_1+a_2-b_1}) = \\ &= \sum_{cyc} x^{b_1} (y^{a_1+a_2-b_1} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_1+a_2-b_1}) \geq \\ &\geq \sum_{cyc} x^{b_1} (y^{b_2} z^{b_3} + y^{b_3} z^{b_2}) = \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}. \end{aligned}$$

2) Нехай $b_1 \leq a_2$, тоді

$$3b_1 \geq b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + a_2 + a_3,$$

тобто $b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$ і $a_1 \geq a_2 \geq b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$. Звідси слідує, що $\max(a_2, a_3) \geq \max(b_1, a_2 + a_3 - b_1)$ і $\max(a_1, a_2 + a_3 - b_1) \geq \max(b_2, b_3)$.

Таким чином, аналогічно до попереднього, одержуємо:

$$\begin{aligned}
 \sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} &= \sum_{cyc} x^{a_1} (y^{a_2} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_2}) \geqslant \\
 &\geqslant \sum_{cyc} x^{a_1} (y^{b_1} z^{a_2+a_3-b_1} + y^{a_2+a_3-b_1} z^{b_1}) = \\
 &= \sum_{cyc} y^{b_1} (x^{a_1} z^{a_2+a_3-b_1} + x^{a_2+a_3-b_1} z^{a_1}) \geqslant \\
 &\geqslant \sum_{cyc} y^{b_1} (x^{b_2} z^{b_3} + x^{b_3} z^{b_2}) = \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}.
 \end{aligned}$$

Зауваження. Рівність у нерівності Мюрхеда досягається тоді і тільки тоді, коли або $x = y = z$, або $x = y$, $z = 0$, або $y = z$, $x = 0$, або $z = x$, $y = 0$. $\square$

Задача 4. Нехай a , b , c — додатні дійсні числа такі, що $abc = 1$. Доведіть, що виконується така нерівність

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leqslant 1.$$

(Турнір Міст, 1997)

Розв'язання. Оскільки $abc = 1$, то спочатку зробимо дану нерівність однорідною:

$$\frac{1}{a+b+(abc)^{1/3}} + \frac{1}{b+c+(abc)^{1/3}} + \frac{1}{c+a+(abc)^{1/3}} \leqslant \frac{1}{(abc)^{1/3}}.$$

Після нових позначень $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, де $x, y, z > 0$, нерівність матиме вигляд:

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{1}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{1}{z^3 + x^3 + xyz} \leqslant \frac{1}{xyz}.$$

Після множення обох частин нерівності на спільний знаменник, одержимо еквівалентну нерівність:

$$\begin{aligned}
 xyz \sum_{cyc} (x^3 + y^3 + xyz) (y^3 + z^3 + xyz) &\leqslant \\
 &\leqslant (x^3 + y^3 + xyz) (y^3 + z^3 + xyz) (z^3 + x^3 + xyz).
 \end{aligned}$$

Розкриваємо дужки і зводимо подібні доданки. Одержуємо:

$$\sum_{sym} x^6 y^3 \geq \sum_{sym} x^5 y^2 z^2.$$

Оскільки $(6, 3, 0) \succ (5, 2, 2)$, то за теоремою Мюрхеда, остання нерівність є правильною. $\square$

Задача 5. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа такі, що $abc = 1$. Доведіть, що виконується така нерівність

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

(XXXVI ММО, Торонто, Канада, 1995 р.)

Розв'язання. Оскільки $abc = 1$, то це дає нам змогу зробити задану нерівність еквівалентну такій однорідній нерівності:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2(abc)^{4/3}}.$$

Зробимо заміну змінних: $a = x^3, b = y^3, c = z^3$, де $x, y, z > 0$. Тоді попередня нерівність запишеться так:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^9(y^3+z^3)} \geq \frac{3}{2x^4y^4z^4}.$$

Звівши її до спільного знаменника і, згрупувавши відповідні доданки, одержимо:

$$\sum_{sym} x^{12}y^{12} + 2 \sum_{sym} x^{12}y^9z^3 + \sum_{sym} x^9y^9z^6 \geq 3 \sum_{sym} x^{11}y^8z^5 + 6x^8y^8z^8$$

або

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{sym} x^{12}y^{12} - \sum_{sym} x^{11}y^8z^5 \right) + 2 \left(\sum_{sym} x^{12}y^9z^3 - \sum_{sym} x^{11}y^8z^5 \right) + \\ & + \left(\sum_{sym} x^9y^9z^6 - \sum_{sym} x^8y^8z^8 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

За теоремою Мюрхеда, остання нерівність є правильною при всіх додатних значеннях змінних, бо $(12, 12, 0) \succ (11, 8, 5)$, $(12, 9, 3) \succ (11, 8, 5)$ і $(9, 9, 6) \succ (8, 8, 8)$. $\square$

Задача 6. Нехай x, y, z — додатні дійсні числа. Доведіть, що виконується така нерівність

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$$

(Іран, 1996 р.)

Розв’язання. Зауважимо, ця нерівність є однорідною. Тому, звівши її до спільного знаменника і, згрупувавши відповідні доданки, одержимо еквівалентну нерівність:

$$4 \sum_{sym} x^5 y + 2 \sum_{cyc} x^4 y z + 6 x^2 y^2 z^2 - \sum_{sym} x^4 y^2 - 6 \sum_{cyc} x^3 y^3 - 2 \sum_{sym} x^3 y^2 z \geq 0$$

або

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{sym} x^5 y - \sum_{sym} x^4 y^2 \right) + 3 \left(\sum_{sym} x^5 y - \sum_{sym} x^3 y^3 \right) + \\ & + 2xyz \left(\sum_{cyc} x(x-y)(x-z) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Остання нерівність є правильною, бо при будь-яких додатних значеннях змінних, за теоремою Мюрхеда, невід’ємними будуть доданки в перших двох дужках, адже $(5, 1, 0) \succ (4, 2, 0)$ і $(5, 1, 0) \succ (3, 3, 0)$, а, за теоремою Шура, невід’ємною буде й сума в третій дужках. $\square$

Задача 7. Нехай m_a, m_b, m_c — медіани трикутника ABC , які проведені до сторін BC, CA, AB , а r_a, r_b, r_c — радіуси зовнівписаних кіл цього трикутника, які дотикаються вказаних сторін відповідно. Доведіть, що виконується така нерівність

$$\frac{r_a r_b}{m_a m_b} + \frac{r_b r_c}{m_b m_c} + \frac{r_c r_a}{m_c m_a} \geq 3.$$

Розв’язання. Нехай $2p = a + b + c$, де a, b, c — відповідні сторони трикутника, тоді, як відомо, вказані елементи трикутника можна виразити через ці сторони:

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}, \quad m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \quad \text{і т. д.}$$

Таким чином,

$$\sum_{cyc} \frac{r_b r_c}{m_b m_c} = \sum_{cyc} \frac{4p(p-a)}{\sqrt{(2c^2 + 2a^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2)}}.$$

Далі, використовуючи нерівність $\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2}$, де $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, одержуємо:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{r_b r_c}{m_b m_c} &\geq \sum_{cyc} \frac{8p(p-a)}{(2c^2 + 2a^2 - b^2) + (2a^2 + 2b^2 - c^2)} = \\ &= \sum_{cyc} \frac{2(a+b+c)(b+c-a)}{4a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Тепер залишилося довести таку нерівність:

$$\sum_{cyc} \frac{2(a+b+c)(b+c-a)}{4a^2 + b^2 + c^2} \geq 3.$$

Звівши її до спільного знаменника і, згрупувавши відповідні доданки, одержимо еквівалентну нерівність:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{cyc} a^6 + 4 \sum_{cyc} a^4 b c + 20 \sum_{cyc} a^3 b^2 c + 68 \sum_{cyc} a^3 b^3 + 16 \sum_{cyc} a^5 b &\geq \\ &\geq 276 a^2 b^2 c^2 + 27 \sum_{cyc} a^4 b^2. \end{aligned}$$

Нехай x, y, z — відрізки дотичних до вписаного кола, проведених з вершин A, B, C відповідно, тоді $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, де $x, y, z > 0$. Тоді остання нерівність, для сторін трикутника, еквівалентна такій алгебраїчній нерівності:

$$\begin{aligned} 25 \sum_{sym} x^6 + 230 \sum_{sym} x^5 y + 115 \sum_{sym} x^4 y^2 + 10 \sum_{sym} x^3 y^3 + 80 \sum_{sym} x^4 y z &\geq \\ &\geq 336 \sum_{sym} x^3 y^2 z + 124 \sum_{sym} x^2 y^2 z^2. \end{aligned}$$

Далі, згрупувавши відповідні суми належним чином, ми за теоремою Мюрхеда, одержимо потрібний результат:

$$25 \left(\sum_{sym} x^6 - \sum_{sym} x^3 y^2 z \right) + 230 \left(\sum_{sym} x^5 y - \sum_{sym} x^3 y^2 z \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + 81 \left(\sum_{sym} x^4 y^2 - \sum_{sym} x^3 y^2 z \right) + 34 \left(\sum_{sym} x^4 y^2 - \sum_{sym} x^2 y^2 z^2 \right) + \\
& + 10 \left(\sum_{sym} x^3 y^3 - \sum_{sym} x^2 y^2 z^2 \right) + 80 \left(\sum_{sym} x^4 y z - \sum_{sym} x^2 y^2 z^2 \right) \geq 0,
\end{aligned}$$

бо $(6, 0, 0) \succ (3, 2, 1)$, $(5, 1, 0) \succ (3, 2, 1)$, $(4, 2, 0) \succ (3, 2, 1)$, $(4, 2, 0) \succ (2, 2, 2)$, $(3, 3, 0) \succ (2, 2, 2)$ і $(4, 1, 1) \succ (2, 2, 2)$. $\square$

Кубічна нерівність та її застосування

Цікавим наслідком з нерівності Шура є теорема, яку називають *кубічною нерівністю*.

Теорема 3. Нехай $P(u, v, w)$ — однорідний симетричний многочлен третього степеня з дійсними коефіцієнтами. Якщо $P(1, 1, 1) \geq 0$, $P(1, 1, 0) \geq 0$ і $P(1, 0, 0) \geq 0$, то для будь-яких дійсних невід'ємних x, y та z виконується така нерівність $P(x, y, z) \geq 0$.

Доведення. Оскільки $P(u, v, w)$ — однорідний симетричний многочлен третього степеня, то він має такий вигляд:

$$P(u, v, w) = A \sum_{cyc} u^3 + B \sum_{sym} u^2 v + C uvw,$$

де A, B, C — задані дійсні числа. Позначимо через $p = P(1, 1, 1) = 3A + 6B + C$, $q = P(1, 1, 0) = A + B$ і $r = P(1, 0, 0) = A$. Звідси знаходимо, $A = r$, $B = q - r$ і $C = p - 6q + 3r$, де p, q, r — невід'ємні дійсні числа.

Нехай $x, y, z \geq 0$, тоді

$$P(x, y, z) = r \sum_{cyc} x^3 + (q - r) \sum_{sym} x^2 y + (p - 6q + 3r) xyz.$$

Перепишемо цей вираз у такому вигляді

$$P(x, y, z) = r \left(\sum_{cyc} x^3 + 3xyz - \sum_{sym} x^2 y \right) + q \left(\sum_{sym} x^2 y - 6xyz \right) + pxyz.$$

Оскільки $\sum_{cyc} x^3 + 3xyz - \sum_{sym} x^2 y \geq 0$ (це результат задачі 1) та $\sum_{sym} x^2 y - 6xyz \geq 0$ (це результат нерівності Коші), то одержуємо: $P(x, y, z) \geq 0$, що і треба було довести $\square$

Спочатку покажемо застосування кубічної нерівності до раніше розв'язаної нами задачі.

Задача 8. Нехай x, y, z — невід'ємні дійсні числа такі, що $x + y + z = 1$. Доведіть, що виконується така нерівність

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

(XXV ММО, Прага, Чехословаччина, 1984 р.)

Розв'язання. Оскільки $x + y + z = 1$, то наша нерівність еквівалентна такій нерівності

$$0 \leq (xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz \leq \frac{7}{27}(x + y + z)^3$$

(ми «вирівняли» степінь усіх членів нерівності, тобто зробили її рівною три). Доведемо цю нерівність для будь-яких невід'ємних дійсних чисел.

Для цього розглянемо два однорідних симетричних кубічних многочлени:

$$P(u, v, w) = (uv + vw + wu)(u + v + w) - 2uvw$$

та

$$Q(u, v, w) = \frac{7}{27}(u + v + w)^3 - (uv + vw + wu)(u + v + w) + 2uvw.$$

Оскільки всі значення $P(1, 1, 1) = 7$, $P(1, 1, 0) = 2$, $P(1, 0, 0) = 0$ та $Q(1, 1, 1) = 0$, $Q(1, 1, 0) = \frac{2}{27}$, $Q(1, 0, 0) = \frac{7}{27}$ — невід'ємні, то за теоремою про кубічну нерівність одержуємо, що $P(x, y, z) \geq 0$ і $Q(x, y, z) \geq 0$ при всіх $x, y, z \geq 0$. Звідси при $x + y + z = 1$, одержуємо справедливність твердження задачі. $\square$

Задача 9. Нехай x, y, z — невід'ємні дійсні числа такі, що $x + y + z = 1$. Доведіть, що виконується така нерівність

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4}.$$

(США, 1979 р.)

Розв'язання. Оскільки $x + y + z = 1$, то наша нерівність, еквівалентна такій нерівності

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4}(x + y + z)^3$$

(ми «вирівняли» степінь усіх членів нерівності, тобто зробили її рівною три). Доведемо цю нерівність для будь-яких невід'ємних дійсних чисел.

Для цього розглянемо однорідний симетричний кубічний многочлен:

$$P(u, v, w) = u^3 + v^3 + w^3 + 6uvw - \frac{1}{4}(u + v + w)^3.$$

Оскільки всі значення $P(1, 1, 1) = \frac{9}{4}$, $P(1, 1, 0) = 0$ і $P(1, 0, 0) = \frac{3}{4}$ — невід’ємні, то за теоремою про кубічну нерівність одержуємо, що $P(x, y, z) \geq 0$ при всіх $x, y, z \geq 0$. Звідси, при $x + y + z = 1$, одержуємо справедливість твердження задачі. $\square$

Задача 10. Нехай x, y, z — невід’ємні дійсні числа такі, що $x + y + z = 1$. Доведіть, що виконується така нерівність

$$7(xy + yz + zx) \leq 2 + 9xyz.$$

(Великобританія, 1999 р.)

Розв’язання. Оскільки $x + y + z = 1$, то наша нерівність еквівалентна такій нерівності

$$2(x + y + z)^3 - 7(x + y + z)(xy + yz + zx) + 9xyz \geq 0.$$

Доведемо цю нерівність для будь-яких невід’ємних дійсних чисел.

Для цього розглянемо однорідний симетричний кубічний многочлен:

$$P(u, v, w) = 2(u + v + w)^3 - 7(u + v + w)(uv + vw + wu) + 9uvw.$$

Оскільки всі значення $P(1, 1, 1) = 0$, $P(1, 1, 0) = 2$ і $P(1, 0, 0) = 2$ — невід’ємні, то за теоремою про симетричну кубічну нерівність одержуємо, що $P(x, y, z) \geq 0$ при всіх $x, y, z \geq 0$, що і треба було довести. $\square$

Наслідком з симетричної кубічної нерівності є аналогічне твердження, де роль змінних відіграють довжини сторін деякого трикутника

Теорема 4. Нехай $P(u, v, w)$ — однорідний симетричний многочлен третього степеня з дійсними коефіцієнтами. Якщо $P(1, 1, 1) \geq 0$, $P(1, 1, 0) \geq 0$ і $P(2, 1, 1) \geq 0$, то для будь-яких дійсних невід’ємних чисел a, b та c , які є довжинами сторін деякого трикутника, виконується така нерівність $P(a, b, c) \geq 0$.

Доведення.

Нехай $x = AB_1 = AC_1$, $y = BA_1 = BC_1$ та $z = CA_1 = CB_1$ (див. рис. 6), тоді $a = y + z$, $b = x + z$ і $c = x + y$, де x, y, z — додатні дійсні числа. Тоді $x = \frac{1}{2}(-a + b + c)$, $y = \frac{1}{2}(a - b + c)$ і $z = \frac{1}{2}(a + b - c)$. Причому:

• якщо $a = 1, b = 1, c = 1$, то $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$;

• якщо $a = 1, b = 1, c = 0$, то $x = 0, y = 0, z = 1$;

• якщо $a = 2, b = 1, c = 1$, то $x = 0, y = 1, z = 1$.

Оскільки $P(a, b, c)$ — однорідний симетричний многочлен третього степеня з дійсними коефіцієнтами, то $Q(x, y, z) = P(y + z, z + x, x + y)$ також однорідний симетричний многочлен третього степеня з дійсними коефіцієнтами. Крім того,

$$Q(1, 1, 1) = 8Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 8P(1, 1, 1) \geq 0$$

$$Q(1, 0, 0) = Q(0, 0, 1) = P(1, 1, 0) \geq 0$$

і

$$Q(1, 1, 0) = Q(0, 1, 1) = P(2, 1, 1) \geq 0.$$

Отже, за теоремою 3 має місце така нерівність $Q(x, y, z) \geq 0$, яка еквівалентна нерівності $P(a, b, c) \geq 0$. $\square$

Задача 11. Нехай a, b, c — довжини сторін деякого трикутника, p — його півпериметр. Доведіть, що виконується нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{35} \left(p^2 + \frac{abc}{p} \right).$$

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$\frac{35}{2} (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2) \geq 36 \left(\frac{1}{8} (a + b + c)^3 + abc \right).$$

Для доведення цієї нерівності розглянемо однорідний симетричний многочлен третього степеня:

$$P(u, v, w) = 35(u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2) - 9((u + v + w)^3 + 8uvw).$$

Оскільки всі значення $P(1, 1, 1) = 0$, $P(1, 1, 0) = 68$ і $P(2, 1, 1) = 120$ — невід'ємні, то за теоремою 4 виконується нерівність $P(a, b, c) \geq 0$, що і треба було довести. $\square$

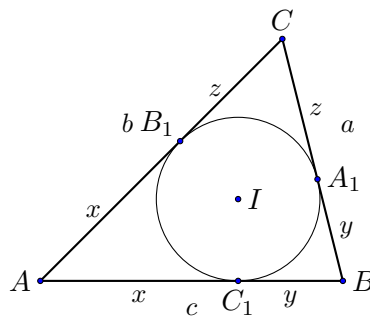


Рис. 6

Сподіваємося, що читачі, ознайомившись із цими технологіями доведення нерівностей, успішно доведуть запропоновані нижче нерівності.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Довести, що для всіх додатних дійсних чисел a, b, c виконується така нерівність

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

(Азійська тихоокеанська математична олімпіада, 2004 р.)

Задача 2. Нехай a, b, c — довжини сторін деякого трикутника. Доведіть, що виконується така нерівність

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 > a^3 + b^3 + c^3 + 2abc.$$

Задача 3. Доведіть, що для кутів гострокутного трикутника ABC виконується така нерівність

$$\operatorname{ctg}^3 A + \operatorname{ctg}^3 B + \operatorname{ctg}^3 C + 6 \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \geq \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C.$$

Задача 4. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC . Доведіть, що виконується така нерівність

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 \geq \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{3}.$$

(Корея, 1998 р.)

Задача 5. Нехай x, y, z — такі невід'ємні дійсні числа, що $xy + yz + zx = 1$. Доведіть, що виконується така нерівність

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{5}{2}.$$

Задача 6. Нехай x, y, z — такі додатні дійсні числа, що $xyz \geq 1$. Доведіть, що виконується така нерівність

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

(XLVI Міжнародна математична олімпіада, 2005 р.)

Задача 7. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа. Доведіть, що виконується така нерівність

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 3.$$

(Математична олімпіада США, 2002 р.)

Задача 8. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа. Доведіть, що виконується така нерівність

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

(Математична олімпіада Японії, 1997 р.)

Задача 9. Нехай a, b, c — довжини сторін деякого трикутника, p — його півпериметр. Доведіть, що виконуються такі нерівності:

а) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 48(p-a)(p-b)(p-c).$

б) $\frac{15}{4} \leq \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{c+a} + \frac{p+c}{a+b} < \frac{9}{2}.$

Задача 10. Нехай a, b, c — довжини сторін деякого трикутника. Доведіть, що виконується така нерівність

$$2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^3+b^3+c^3+3abc).$$

В'ячеслав Ясінський

Застосування рівномірного руху до розв'язування планіметричних задач¹

Якщо точка A рівномірно рухається по прямій a , то її проекція B за заданим напрямом d на пряму b також рухається рівномірно (рис. 1).

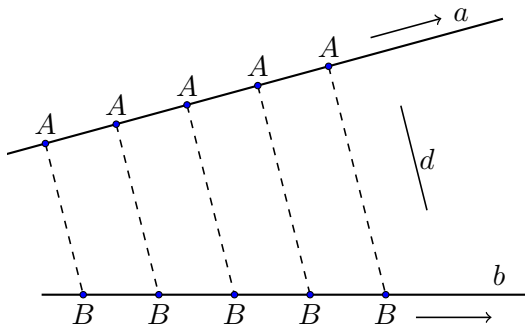


Рис. 1

¹Журнал «Математика в школі», 2000, №2. — С. 38–40.

Таке просте спостереження дозволяє розв'язувати ряд планіметричних задач.

Задача 1. Дано прямі $a_1, a_2, \dots, a_n$ загального положення. На прямій a_1 обирається точка A_1 . Ортогональна проекція A_1 на пряму a_2 позначається A_2 ; ортогональна проекція A_2 на пряму a_3 позначається A_3 і т. д. до одержання A_n на прямій a_n . Ортогональна проекція A_n на a_1 позначається A_1' . Чи можна вибрати на прямій a_1 точку A_1 так, щоб A_1' співпала з A_1 ? Скільки існує таких точок?

Розв'язання. Припустимо, що A_1 рівномірно рухається по прямій a_1 зі швидкістю v_1 . Згідно сформульованого вище спостереження точка A_2 рівномірно рухається по прямій a_2 зі швидкістю v_2 , A_3 — по прямій a_3 зі швидкістю v_3 , $\dots$, A_1' — по прямій a_1 зі швидкістю v_1' . Оскільки $a_1 a_2$, то $v_1 > v_2$ (це випливає з того, що гіпотенуза більша за катет). Аналогічно, $v_2 > v_3 > \dots > v_n > v_1'$. Отже, $v_1 > v_1'$, тобто точки A_1 і A_1' рухаються рівномірно по прямій a_1 з різними швидкостями. Це означає, що існує лише один момент часу, коли A_1 і A_1' . $\square$

Задача 2. Нехай AA_1 і BB_1 — бісектриси трикутника ABC , P — довільна точка на відрізку A_1B_1 . Доведіть, що коли відстані від точки P до прямих AC , BC і AB дорівнюють d_B , d_A і d_C відповідно, то $d_B + d_A = d_C$ (рис. 2).

Розв'язання. Легко довести (зробіть це самостійно), що коли точка рухається рівномірно по прямій, то відстань між нею та її проекцією є лінійною функцією від часу t .

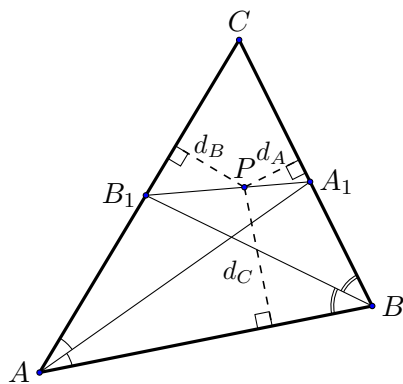


Рис. 2

Нехай точка P рівномірно рухається по відрізку A_1B_1 (від A_1 до B_1), тоді відстані d_A , d_B і d_C залежать лінійно від часу t . А це означає, що функція $f(t) = d_A(t) + d_B(t) - d_C(t)$ є лінійною відносно t . Коли $P = A_1$, то $d_A(t_1) = 0$ і $d_B(t_1) = d_C(t_1)$, а коли $P = B_1$, то $d_B(t_2) = 0$ і $d_A(t_2) = d_C(t_2)$, де $t_1 \neq t_2$ — моменти часу вказаного руху за цих умов. Для цих моментів $f(t_1) = f(t_2) = 0$.

Оскільки $f(t)$ — лінійна функція відносно t , то $f(t) = 0$ для всіх t . А це означає, що $d_A + d_B = d_C$, що й треба було довести. $\square$

Задача 3. Всередині трикутника ABC обрали точку O . Нехай $A_1 = AO \cap BC$, $B_1 = BO \cap AC$, $C_1 = CO \cap AB$. На AB відмітили точки M і Q , на AC — N , на BC — P так, що $MN \parallel B_1C_1$, $NP \parallel A_1B_1$, $PQ \parallel A_1C_1$. Доведіть, що C_1 — середина відрізка MQ (рис. 3).

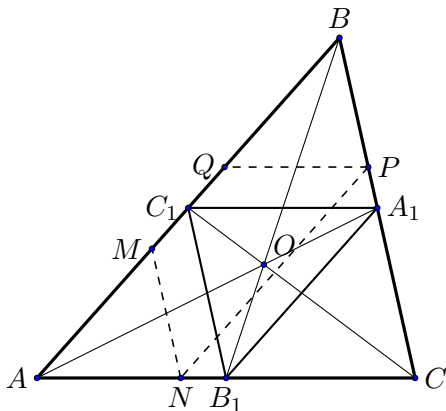


Рис. 3

Розв'язання. Нехай M рухається рівномірно від C_1 до A . Оскільки $MN \parallel B_1C_1$, то N також рівномірно рухається від B_1 до A . Аналогічно, P рівномірно рухається від A_1 до B , а Q — від C_1 до B .

Якщо $M = C_1$, то $N = B_1$, $P = A_1$ і $Q = C_1$, тобто $M = C_1 = Q$.

Якщо $M \neq C_1$, то

$$\frac{v_M}{v_N} = \frac{C_1M}{B_1N} = \frac{C_1A}{B_1A}; \quad (1)$$

$$\frac{v_N}{v_P} = \frac{B_1N}{A_1P} = \frac{B_1C}{A_1C}; \quad (2)$$

$$\frac{v_P}{v_Q} = \frac{A_1P}{C_1Q} = \frac{A_1B}{C_1B}; \quad (3)$$

Перемножимо почленно (1), (2), (3), дістанемо:

$$\frac{v_M}{v_N} \cdot \frac{v_N}{v_P} \cdot \frac{v_P}{v_Q} = \frac{C_1A}{B_1A} \cdot \frac{B_1C}{A_1C} \cdot \frac{A_1B}{C_1B} = \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = 1 \Rightarrow v_M = v_Q$$

(остання рівність — це теорема Чеви).

Отже, точки M і Q рухаються з однаковими швидкостями в протилежних напрямках від точки C_1 . Тому весь час C_1 — середина MQ , що і треба було довести. $\square$

Задача 4. На контурі трикутника ABC обирають послідовно точки M, N, P, Q, R, S, T так, що $MN \parallel BC$, $NP \parallel AB$, $PQ \parallel AC$, $QR \parallel BC$, $RS \parallel AB$, $ST \parallel AC$. Доведіть що $M = T$.

Розв'язання. Якщо AA_1, BB_1, CC_1 — медіани $\triangle ABC$, то вони перетинаються в одній точці, а також $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ і $A_1C_1 \parallel AC$. Використовуючи результат попередньої задачі, одержуємо, що C_1 — середина MQ і C_1 — середина QT , тобто $M = T$. $\square$

Теорема 1. Точки A, B, C рухаються рівномірно по прямих a, b, c відповідно. Якщо в три різні моменти часу точки A, B, C — колінеарні, то вони колінеарні в будь-який момент часу.

Доведення. Нехай $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ — координати точок у прямокутній системі координат. Якщо A рухається рівномірно і прямолінійно, то її проекція $A_1(a_1; 0)$ на вісь Ox також рухається рівномірно. А це означає, що a_1 залежить лінійно від часу t , тобто $a_1 = p_1t + q_1$, де p_1 та q_1 — деякі константи. Аналогічно, $a_2 = p_2t + q_2$, $b_1 = u_1t + v_1$, $b_2 = u_2t + v_2$, $c_1 = m_1t + n_1$, $c_2 = m_2t + n_2$.

За умовою теореми при $t = t_1, t_2, t_3$ маємо $A \in (BC)$. Ця умова (що A, B, C — колінеарні) аналітично записується так:

$$(a_1 - b_1)(a_2 - c_2) = (a_2 - b_2)(a_1 - c_1) \quad (*)$$

Рівність $(*)$ є квадратним рівнянням відносно t і має три різні корені: t_1, t_2, t_3 тобто $(*)$ виконується при всіх t . $\square$

Задача 5. По чотирьох прямолінійних дорогах a, b, c, d рівномірно рухаються пішоходи A, B, C, D відповідно. Відомо, що жодні три з цих доріг не перетинаються в одному перехресті. Відомо, що A і B , A і C , A і D , B і C , B і D зустрічались. Довести, що C і D також зустрічались.

Розв'язання. Коли A і B зустрілись, а це відбулося у точці перетину прямих a і b , то в цей момент точки A, B, C лежать на одній прямій. Точки A, B, C лежать на одній прямій ще й в ті моменти часу, коли A зустрівся з C і коли B зустрівся з C . Отже, A, B, C — завжди колінеарні. Аналогічно доводиться, що A, B, D також колінеарні в будь-який момент часу. Таким чином, A, B, C, D — колінеарні в будь-який момент часу, а це означає, що коли C буде на перехресті доріг c і d , то D також там

буде (якщо $C \neq D$, то $ABCD$ співпадає з d — протиріччя!). $\square$

Задача 6. Про чотирикутник $ABCD$ відомо, що продовження його протилежних сторін AB і CD та BC і DA перетинаються відповідно в точках M і N . Нехай X, Y, Z — середини відрізків AC, BD, MN . Доведіть, що точки X, Y, Z лежать на одній прямій.

Розв'язання. Будемо вважати, що прямі AB, BN, NA — нерухомі. Нехай пряма MCD рухається рівномірно паралельно сама до себе. Тоді точка M рівномірно рухається по прямій AB зі швидкістю v_M , D — по прямій AN зі швидкістю v_D і C — по прямій BN зі швидкістю v_C (див. рис. 4).

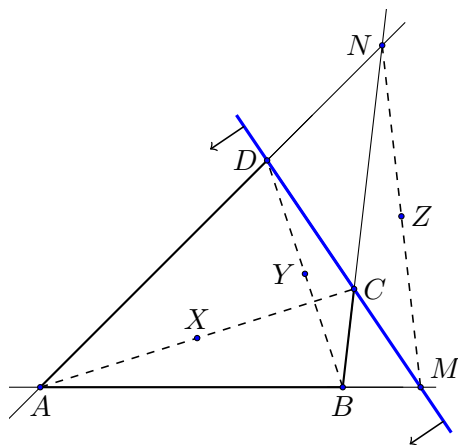


Рис. 4

Оскільки точка A — нерухома, а точка C рухається по прямій NB зі швидкістю v_C , то точка X також рухається по прямій, яка паралельна до прямої BN , і має швидкість $\frac{1}{2}v_C$.

Аналогічно, точка Y рухається рівномірно по прямій, яка паралельна до прямої AN , а Z рухається рівномірно по прямій, яка паралельна AB .

Якщо вірно буде $X \in (YZ)$ для трьох положень прямої $\overline{DCM}$, то за теоремою це буде вірно для будь-якого положення прямої $\overline{DCM}$. Такі положення слідуючі: коли пряма $\overline{MCD}$ проходить через вершину A , через B та через N . Для цих трьох положень прямої $\overline{DCM}$ задача тривіальна. $\square$

Задача 7. Про чотирикутник $ABCD$ відомо, що продовження його протилежних сторін AB і CD та BC і DA перетинаються відповідно в точках M і N . Нехай H_1, H_2, H_3, H_4 відповідно ортоцентри трикутників ADM, BCM, CDN, ABN . Доведіть, що точки H_1, H_2, H_3, H_4 лежать на одній прямій.

Розв'язання. Як і в попередній задачі, будемо вважати, що прямі AB, BN, NA — нерухомі, а пряма $\overline{MCD}$ рухається рівномірно, паралельно самій собі. Тоді точки M, D, C рухаються рівномірно по прямих AB, AN, BN (рис. 5).

Ортоцентр H_1 трикутника ADM лежить на прямій a , яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої $\overline{MCD}$. Оскільки пряма $\overline{MCD}$ рухається паралельно сама до себе, то пряма a — нерухома.

Аналогічно, H_2 рухається по прямій b , яка проходить через B і $b \perp \overline{MCD}$ та H_3 — по прямій n , яка проходить через N і $n \perp \overline{MCD}$, причому прямі b і n також нерухомі.

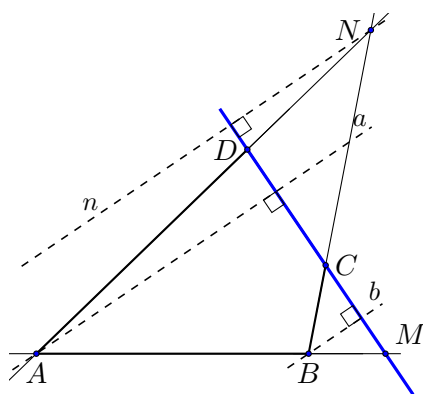


Рис. 5

Оскільки M рівномірно рухається по прямій AB , то пряма, яка проходить через M і перпендикулярна до нерухомої прямої BN , також буде рухатися рівномірно. А це означає, що точка H_2 перетину цієї прямої з нерухомою прямою b буде рухатися рівномірно по прямій b . Аналогічно доводиться, що H_1 та H_3 рухаються рівномірно відповідно по прямих a і n .

Коли пряма $\overline{MCD}$ проходить через A , тоді $A = D = M$, $\triangle ADM$ вироджується в точку $H_1 = A$ (рис. 6).

Точки H_2 і H_3 лежать на прямій h , яка проходить через A і перпендикулярна до BN . Отже, H_1, H_2, H_3 лежать на прямій h .

Якщо пряма $\overline{MCD}$ проходить через точку B , то H_1, H_2, H_3 колінеарні, а якщо $\overline{MCD}$ проходить через N , то H_1, H_2, H_3 також колінеарні. Отже, згідно з теоремою, точки H_1, H_2, H_3 будуть колінеарними за будь-яких положень прямої $\overline{MCD}$. Аналогічно доводиться, що H_1, H_2, H_4 — колінеарні, тобто H_1, H_2, H_3, H_4 — колінеарні. $\square$

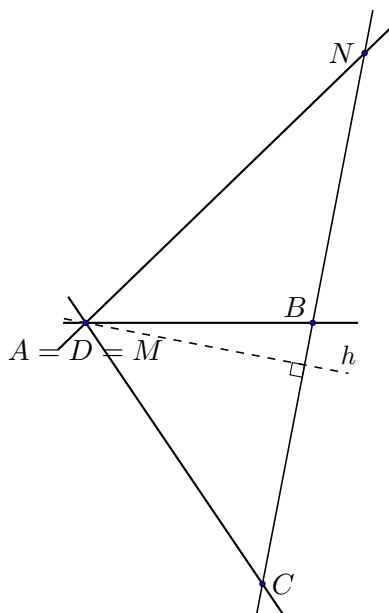


Рис. 6

Задача 8. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — висоти трикутника ABC . Пряма p паралельна до висоти CC_1 , перетинає AC і A_1C_1 відповідно в точках

E і F . Доведіть, що центр описаного кола навколо трикутника B_1EF лежить на прямій BC (рис. 7).

Розв'язання. Нехай пряма p рухається рівномірно, паралельна сама до себе. Тоді точки E і F рухаються рівномірно по прямим AC і A_1C_1 відповідно, а точка B_1 — нерухома. Отже, серединні перпендикуляри до відрізків B_1E та B_1F також рівномірно рухаються, залишаючись паралельними до самих себе. А це означає, що точка їх перетину O — центр кола, описаного навколо $\triangle B_1EF$, також рухається рівномірно з деякою швидкістю $\vec{v}_0 = \text{const}$. Це означає, що достатньо показати, що O лежить на BC при двох положеннях прямої p .

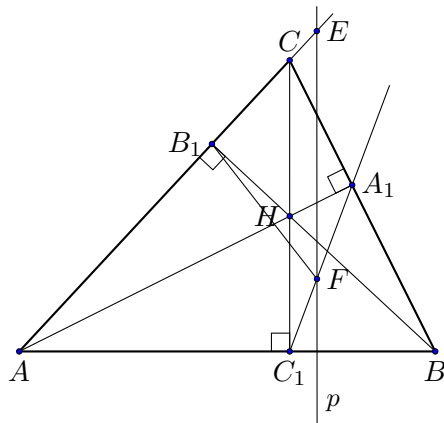


Рис. 7

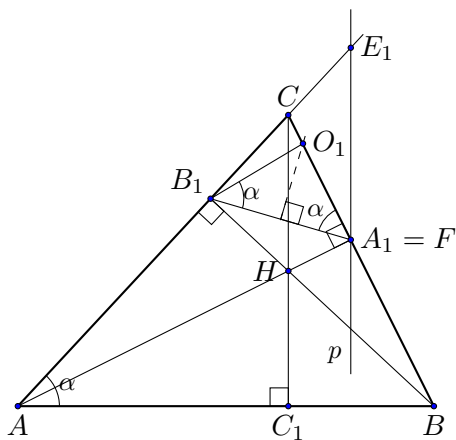


Рис. 8

Нехай p співпадає з прямою CC_1 . Тоді $E = C$, $F = C_1$. Оскільки точки B , C_1 , B_1 , C лежать на одному колі, діаметр якого є відрізок BC (бо $\angle CB_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$). Отже в цьому випадку центр кола, описаного навколо $\triangle B_1EF$ лежить на прямій BC .

Нехай p проходить через A_1 (рис. 8). Тоді $F = A_1$, а точка E займе положення E_1 . Оскільки точки A , B , B_1 , A_1 лежать на одному колі, то $\angle B_1A_1C =$

$= \angle BAB_1 = \alpha$. Нехай O_1 — точка перетину серединного перпендикуляра до відрізка A_1B_1 з прямою BC , тоді $\angle A_1O_1B_1 = 180^\circ - 2\alpha$.

З іншого боку, $\angle AE_1A_1 = \angle ACC_1 = 90^\circ - \alpha$. Отже, O_1 — центр кола, описаного навколо трикутника $A_1B_1E_1$. $\square$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Всередині правильного многокутника $A_1, A_2, \dots, A_n$ обрали точку P так, що її ортогональні проєкції $P_1, P_2, \dots, P_n$ на сторони $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ лежать на контурі многокутника. Довести, що

$$A_1P_1 + A_2P_2 + \dots + A_nP_n = P_1A_2 + P_2A_3 + \dots + P_nA_1.$$

2. Точка D пробігає сторону AB трикутника ABC . На сторонах BC і AC обирають точки E і F так, що $DE \parallel AC$ і $DF \parallel BC$. Яку множину точок пробігає центр кола, описаного навколо трикутника DEF ?

3. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — висоти трикутника ABC . Пряма, паралельна до BC , перетинає AB і A_1B_1 в точках E і F . Доведіть, що центр кола, описаного навколо трикутника C_1EF лежить на прямій BB_1 .

В'ячеслав Ясінський

Про застосування орієнтованої відстані¹

Розглянемо координатну площину XOY і довільну пряму l на ній. Позначимо через $d_l(M)$ орієнтовану відстань від точки M до прямої l . Якщо точка M лежить по один бік від прямої l , що й точка O — початок координат, то це звичайна відстань від точки M до прямої. В іншому випадку це теж відстань, тільки взята зі знаком «-».

Якщо рівняння прямої l має вигляд $ax + by + c = 0$, a, b, c — задані числа, то, як відомо,

$$d_l(M) = \frac{ax_M + by_M + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{або} \quad d_l(M) = -\frac{ax_M + by_M + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

де (x_M, y_M) — координати точки M . Зрозуміло, що $d_l(M)$ — лінійна функція від координат точки M .

Розглянемо на площині n прямих $l_1, l_2, \dots, l_n$ і для кожної точки X площини задамо функцію $f(X)$: $f(X) = \lambda_1 d_{l_1}(X) + \lambda_2 d_{l_2}(X) + \dots + \lambda_n d_{l_n}(X)$, де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — задані дійсні числа. Про їх добір буде сказано нижче. Тоді має місце таке твердження.

Теорема. Для будь-якого заданого дійсного числа k множина точок M площини, таких, що $f(M) = k$, або порожня, або пряма лінія, або співпадає з усією площиною.

¹Журнал «Математика в школі», 1999, №2. — С. 35–37.

Доведення. Введемо прямокутну систему координат Oxy на площині. Нехай $a_i x + b_i y + c_i = 0$ — рівняння i -тої прямої l_i , $i = 1, 2, \dots$. Тоді, якщо (x_M, y_M) — координати точки M , то рівняння $f(M) = k$ рівносильне рівнянню:

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \cdot \varepsilon_i \right) x_M + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \cdot \varepsilon_i \right) y_M + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \cdot \varepsilon_i \right) = k,$$

де $\varepsilon_i = 1$, якщо M лежить по один бік з точкою O від прямої l_i , та $\varepsilon_i = -1$ — в іншому випадку. Тобто, координати точки M задовольняють рівнянню $\alpha x_M + \beta y_M + \gamma = 0$, α, β, γ — дійсні числа. Якщо $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = k$, то множина точок M співпадає з усією площиною. Якщо $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq k$, то ця множина порожня. Якщо $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, то ця множина — пряма лінія.

Наслідок. Якщо для трьох різних точок P, Q, R площини виконуються рівності $f(P) = f(Q) = f(R)$ і для деякої точки M площини виконується нерівність $f(M) \neq f(P)$, то точки P, Q, R лежать на одній прямій.

А тепер покажемо, як орієнтовані відстані можна застосовувати до розв'язування задач.

Задача 1. Нехай A_1, B_1, C_1 — точки перетину бісектрис зовнішніх кутів трикутника ABC відповідно з прямими BC, AC, AB . Доведіть, що точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай початок координат O лежить всередині трикутника ABC . Для будь-якої точки X площини трикутника ABC позначимо через $f(X) = d_{AB}(X) + d_{BC}(X) + d_{AC}(X)$. Легко перевірити, що $f(A_1) = f(B_1) = f(C_1) = 0$, $f(O) \neq 0$. За наслідком одержуємо, що точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Задача 2. Нехай A_1 — точка перетину дотичної до кола, описаного навколо трикутника ABC , в точці A з прямою BC . Аналогічно визначаються точки B_1, C_1 . Довести, що точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ — внутрішні кути трикутника ABC , а початок координат — точка O — лежить всередині ABC . Для будь-якої точки X площини трикутника ABC позначимо

через

$$f(X) = \frac{1}{\sin \gamma} \cdot d_{AB}(X) + \frac{1}{\sin \beta} \cdot d_{BC}(X) + \frac{1}{\sin \alpha} \cdot d_{AC}(X).$$

Для точок, які лежать всередині $\triangle ABC$, $f(X) > 0$, для точок A_1, B_1, C_1 легко порахувати, що $f(A_1) = f(B_1) = f(C_1) = 0$ (зробіть це самостійно). Тому за наслідком одержуємо, що точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Задача 3. Розглянемо опуклий чотирикутник $ABCD$. Пари його протилежних сторін продовжені до перетину: AB і CD в точці P , CB і DA — в точці Q . Нехай l_A, l_B, l_C, l_D — бісектриси зовнішніх кутів чотирикутника при його вершинах A, B, C, D відповідно. Нехай l_P, l_Q — зовнішні бісектриси кутів APD і AQB . Позначимо через M_{AC} точку перетину l_A і l_C ; через M_{BD} — l_B і l_D , через M_{PQ} — l_P і l_Q . Доведіть, що коли всі три точки M_{AC}, M_{BD}, M_{PQ} існують, то вони лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай O — початок координат і лежить всередині даного чотирикутника. Для будь-якої точки X площини чотирикутника $ABCD$ позначимо через

$$f(X) = d_{AB}(X) + d_{BC}(X) + d_{CD}(X) + d_{DA}(X).$$

Легко перевіряється, що $f(M_{AC}) = f(M_{BD}) = f(M_{PQ}) = 0$, а $f(O) > 0$.

За наслідком одержуємо, що точки M_{AC}, M_{BD}, M_{PQ} лежать на одній прямій.

Задача 4. Довести, що коли в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, то його центр і середини діагоналей AC і BD лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай O — центр вписаного кола — співпадає з початком координат, M — середина AC і N — середина BD (зробіть малюнок). Для будь-якої точки X площини чотирикутника $ABCD$ позначимо через

$$\begin{aligned} F(X) &= S_{\triangle AXB} - S_{\triangle BXC} - S_{\triangle CXD} - S_{\triangle DXA} = \\ &= \frac{1}{2} |AB| d_{AB}(X) - \frac{1}{2} |BC| d_{BC}(X) + \frac{1}{2} |CD| d_{CD}(X) - \frac{1}{2} |DA| d_{DA}(X). \end{aligned}$$

(тут $S_{\triangle AXB}$ — орієнтована площа $\triangle AXB$). Легко перевіряється (зробіть самостійно), що $f(M) = f(O) = f(N) = 0$, а $f(K) > 0$, де K — точка перетину діагоналей ($ABCD$ — не є ромб). За наслідком одержуємо, що точки M, O, N лежать на одній прямій.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Розгляньте чотирикутник $ABCD$, про який йдеться в задачі 3. Нехай M , N , R — середини відрізків AC , BD , PQ відповідно. Довести, що точки M , N , R лежать на одній прямій (прямій Гаусса).

2. Протилежні сторони опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точках E і F . Довести, що точки перетину бісектрис кутів A і C , B і D , а також зовнішніх кутів E і F лежать на одній прямій.

Вказівка. Порівняйте цю задачу із задачею 3.

3. Нехай O , G , H — відповідно центр описаного кола, точка перетину медіан, і точка перетину висот трикутника ABC . Довести, що точки O , G , H лежать на одній прямій (прямій Ейлера).

Вказівка. Розгляньте функцію

$$f(X) = d_{AB}(X) \cdot \sin \gamma (\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + d_{AC}(X) \cdot \sin \beta (\sin 2\gamma - \sin 2\alpha) + \\ + d_{BC}(X) \cdot \sin \alpha (\sin 2\beta - \sin 2\gamma),$$

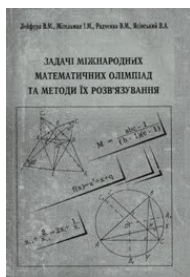
де α , β , γ — кути даного трикутника.

Список публікацій

В. А. Ясінського

Навчальні та навчально-методичні посібники

1. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. / В. А. Ясінський — Вінниця : “Видавництво ВДПУ”, 1998. — 266 с.



2. Ясінський В. А. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування : Навчально-методичний посібник / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. — Львів : Євросвіт, 1999. — 128 с.

Наводяться матеріали Міжнародних математичних олімпіад, в яких брала участь команда України. Для учнів, що готуються до участі в математичних олімпіадах та прагнуть удосконалити навички у розв'язуванні складних задач. Книга буде цінним посібником для вчителів математики, керівників математичних гуртків, організаторів олімпіад і студентів педагогічних спеціальностей.

3. Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України, 1998–1999 рр. : Навчальне видання / М. С. Добосевич, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. В. Некрашевич, В. М. Радченко, О. Ю. Теплінський, В. А. Ясінський. — Кам'янець-Подільський : “Абетка”, 2000. — 51 с.

У книзі подано умови та розв'язання задач третього та четвертого етапів 39-ої Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Матеріали відбірково-тренувальних зборів команди України по підготовці до 40-ої Міжнародної математичної олімпіади та умови й розв'язання задач 40 Міжнародної математичної олімпіади.

4. Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України, 1999–2000 рр. : Навчальне видання. / М. С. Добосевич, В. М. Лейфура, В. С. Мазорчук,

І. М. Мітельман, В. М. Радченко, О. Ю. Теплінський, В. О. Швець, В. А. Ясінський. — Кам'янець-Подільський, “Абетка” : 2000. — 65 с.

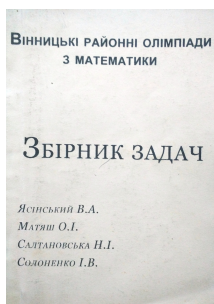
У книзі подано умови та розв'язання задач третього та четвертого етапів 40-ої Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Матеріали відбірково-тренувальних зборів команди України по підготовці до 41-ої Міжнародної математичної олімпіади та умови й розв'язання задач 41 Міжнародної математичної олімпіади.

5. Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України, 2000–2001 рр. : Навчальне видання. / М. С. Добосевич, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, І. П. Нагель, В. В. Некрашевич, А. Я. Оленко, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. — Кам'янець-Подільський, “Абетка НОВА” : 2001. — 48 с.



У книзі подано умови та розв'язання задач третього та четвертого етапів 41-ої Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Матеріали відбірково-тренувальних зборів команди України по підготовці до 42-ої Міжнародної математичної олімпіади та умови й розв'язання задач 42 Міжнародної математичної олімпіади.

6. Ясінський В. А. Збірник задач з теорії чисел : Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів та інститутів / В. С. Гарвацький, В. Т. Кулик, І. О. Рокіцький, Р. І. Рокіцький, В. А. Ясінський. — Вінниця : “Видавництво ВДПУ”, 2001. — 116 с.

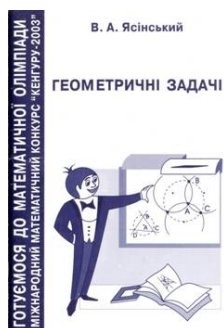


7. Ясінський В. А. Районні математичні олімпіади на Вінниччині / В. А. Ясінський О. І. Матяш, Н. І. Салтановська, І. В. Солоненко. — Вінниця : “Видавництво ВДПУ”, 2003. — 136 с.

Книга написана на основі матеріалів районних математичних олімпіад, які проводились на Вінниччині протягом 1991–2001 років. Тематика олімпіадних завдань охоплює багато різних задач з різних розділів математики. Задачі можуть бути використані при проведенні олімпіад та різноманітних конкурсів і вікторин. Рівень складності задач досить різноманітний: вони будуть корисні як для юних любителів математики, так і для вчителів ЗОШ, викладачів ВНЗ різних рівнів.

8. Ясінський В. А. Математика. Олімпіадні задачі. Випуск 1 : Навчальний посібник / В. А. Ясінський. — Тернопіль : “Навчальна книга — Богдан”, 2004. — 40 с.

У посібнику подано понад 250 задач з математики, які пропонувалися при підготовці команд різних країн світу до участі у міжнародних математичних олімпіадах (1996–2002 рр.). Для учнів, викладачів математики, керівників математичних гуртків, студентів, всіх, хто захоплюється математикою.

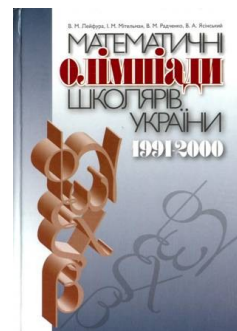


9. Ясінський В. А. Геометричні задачі : Навчально-методичний посібник / В. А. Ясінський — Львів : “Каменярь”, 2003. — 75 с.

У збірнику представлені задачі олімпіадного геометричного фольклору, які пройшли «природний відбір» на математичних олімпіадах різних рангів (здебільшого на районних та обласних) у різний час. Вони відображають основні олімпіадні геометричні ідеї, які стали частиною загальноматематичної культури. Крім того, у збірнику присутні й авторські задачі. Всі задачі класифіковано за методами їх розв’язування у наступні розділи: планіметрія; стереометрія; комбінаторна геометрія; геометричні нерівності, оцінки, екстремуми; вектори. Кожен розділ складається з теоретичних відомостей, олімпіадних задач та розв’язків, вказівок і відповідей до них. Це дає можливість використовувати збірник й тим, хто готується до олімпіад самостійно.

10. Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України 1991–2000 : Навчально-методичний посібник / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. — Київ : “Техніка”, 2003. — 540 с.

У книзі подано з докладними розв’язаннями всі задачі, що пропонувалися на заключному турі Всеукраїнських математичних олімпіад у 1991–2000 рр. Посібник містить також задачі з розв’язаннями третього етапу Всеукраїнських олімпіад (обласні олімпіади), Соросівських та Міжнародних математичних олімпіад.





11. Ясінський В. А. Змагання юних математиків України. 2003 рік / В. О. Борисова, О. Г. Кукуш, В. М. Лейфура та ін. — Харків : Вид. група “Основа”, 2004. — 192 с.

Книга містить матеріали математичних змагань, які проводилися в Україні протягом 2003 року, а також матеріал 44-ої Міжнародної олімпіади. Книга включає формулювання та докладні розв’язання задач; у багатьох випадках наведено декілька розв’язань однієї і тієї ж задачі. Різний рівень складності та різноманітність тематики дозволяє використовувати цю книгу як для підготовки школярів до математичних олімпіад, так і для занять гуртків на факультативів.

12. Ясінський В. А. Змагання юних математиків України. 2004 рік / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. А. Ясінський — Харків : Вид. група “Основа”, 2005. — 128 с.

У посібнику подано умови та розв’язання задач учнівських математичних олімпіад, які проводилися в Україні в 2004 році II–IV етапів Всеукраїнської олімпіади, відбірково-тренувальних зборів кандидатів до команди України на Міжнародні математичні олімпіади. Наводяться матеріали 45-тої Міжнародної математичної олімпіади, а також завдання шостої відкритої фізико-математичної олімпіади Рішельєвського ліцею при Одеському національному університеті.



13. Ясінський В. А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції / В. А. Ясінський. — Харків : Вид. група “Основа”, 2005. — 96 с.

Книга складається із двох частин. У першій частині висвітлена тема «Функціональні рівняння та методи їх розв’язування». У другій частині пропонується метод доведення різноманітних математичних тверджень — метод математичної індукції. До більшості задач, що розміщені у посібнику, дано відповіді та повні їх розв’язання. До багатьох задач є вказівки, які можуть допомогти знайти ідею розв’язування.

14. Ясінський В. А. Змагання юних математиків України. 2005 рік / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. А. Ясінський — Харків : Вид. група “Основа”, 2006. — 112 с.

Книга містить матеріали математичних змагань, які проводились в Україні в 2005 році, а також матеріали 46-ї Міжнародної олімпіади. У посібнику вміщено формулювання та докладні розв’язання задач, у багатьох випадках дано декілька розв’язань однієї і тієї ж задачі. Різний рівень складності та різноманітність тематики дозволяє використовувати цю книгу як для підготовки школярів до математичних олімпіад, так і для занять гуртків та факультативів.



15. Ясінський В. А. Практикум з розв’язування задач математичних олімпіад / В. А. Ясінський. — Х. : Вид. група “Основа”, 2006. — 128 с.

Книга рекомендована для вчителів і учнів загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій, керівників математичних гуртків. У посібнику розглядається система вправ з розділів: «Алгебра», «Геометрія», «Комбінаторика», «Теорія чисел», «Конструкції». У кожному з них наведені зразки міркувань і розв’язування типових задач та система задач для самостійного розв’язування.



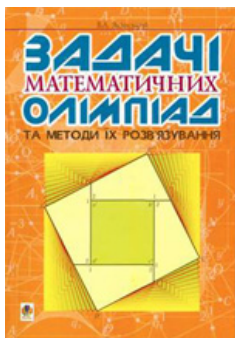
16. Ясінський В. А. Змагання юних математиків України. 2006 рік / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. А. Ясінський — Львів : Каменяр, 2007. — 112 с.

Книга містить матеріали математичних змагань, які проводились в Україні в 2006 році, а також матеріали 47-ї Міжнародної математичної олімпіади. У посібнику вміщено формулювання та докладні розв’язання задач, у багатьох випадках дано декілька розв’язань однієї і тієї ж задачі. Різний рівень складності та різноманітність тематики дозволяє використовувати цю книгу як для підготовки школярів до математичних олімпіад, так і для занять гуртків та факультативів.



17. Ясінський В. А. Турніри юних математиків України. Збірник матеріалів / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, М. О. Перестюк, К. В. Рабець, В. А. Ясінський — Суми : УАБС НБУ, 2007. — 121 с.

У збірнику наведено положення про Всеукраїнський турнір юних математиків, завдання дев'яти Всеукраїнських турнірів, думки і поради організаторів ТЮМ.



18. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. А. Ясінський. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2005. — 208 с.

Книга розрахована на студентів педагогічних університетів, вчителів математики та керівників математичних гуртків, а також учнів загальноосвітніх шкіл.

Зміст посібника розділено на параграфи: Метод математичної індукції; Цілі числа. Подільність; Цифри і системи числення; Числа раціональні та ірраціональні; Квадратний тричлен. Неперервні функції, графіки і корені рівнянь; Алгебра многочленів; Рівняння і системи рівнянь; Доведення нерівностей; Принцип Діріхле; Комбінаторика; Графи. Відображення; Парність, фарбування; Задачі на решітках; Операції та інваріанти; Перестановки, розміщення і комбінація цілих чисел та цифр. Турніри; Планіметрія; Стереометрія; Комбінаторна геометрія; Геометричні нерівності, оцінки, екстремуми; Вектори; Оцінки і екстремальні задачі для наборів чисел і таблиць; Послідовності; Ігри, переслідування, стратегії та алгоритми; Цікаві задачі та конструкції; Функціональні рівняння.

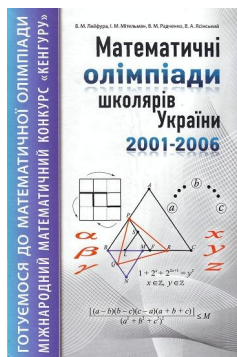
У кожному параграфі подаються короткі теоретичні відомості, диференційована добірка задач та розв'язки, вказівки й відповіді до них.

19. Ясінський В. А. Олімпіадні задачі з геометрії : Навчально-методичний посібник / В. А. Ясінський. — Київ : «Шкільний світ», 2008. — 128 с.

У книжці розглянуто необхідні для розв'язування олімпіадних задач теоретичні матеріали, що не входять до традиційного курсу шкільної геометрії. У першому розділі до тем: класичні теореми планіметрії; теорема Ван-Обеля; Лема Карно та перетин трьох прямих в одній точці; геометричні нерівності; геометрія шестикутника; подвійне відношення; центр мас і скалярний добуток векторів викладено деякі теоретичні відомості, що виходять за рамки програми з математики і зазвичай не потрапляють до шкільних



підручників з геометрії та показано їх застосування до розв'язування задач, які пропонувалися на міжнародних математичних олімпіадах та Математичних олімпіадах країн близького і далекого зарубіжжя. В окремому розділі пропонуються задачі для самостійного опрацювання та розв'язання до них. Посібник підготовлено для вчителів, які готують учнів до участі в олімпіадах, і учнів, які бажують досягти олімпійських вершин.



20. Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рік / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. — Львів : Каменяр, 2008. — 348 с.

У посібнику подано умови та розв'язання майже 800 оригінальних задач учнівських математичних олімпіад, які проводилися в Україні в 2001–2006 рр.: II–IV етапів Всеукраїнської олімпіади, відбірково-тренувальних зборів кандидатів до команди України на Міжнародні математичні олімпіади. Наводяться

матеріали Міжнародних математичних олімпіад 2001–2006 рр., а також — відкритих олімпіад Рішельєвського ліцею при Одеському національному університеті.

21. Ясінський В. А. Олімпіадні задачі з теорії чисел. Практикум із розв'язування / В'ячеслав Ясінський. — К. : Шкільний світ, 2011. — 128 с.

У книжці подано необхідні для розв'язування олімпіадних задач теоретичні матеріали, про які дуже обмежено йдеться в традиційному шкільному курсі алгебри. Кожний блок теорії ілюструється розв'язаннями відповідних задач, що пропонувалися на математичних змаганнях різних рівнів. Окремим розділом подано задачі для самостійного опрацювання та розв'язання до них.



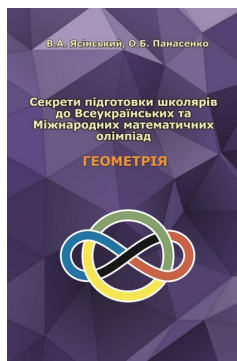
22. Ясінський В. А. Геометричні перетворення в задачах математичних олімпіад. Практикум із розв'язування геометричних задач / В. А. Ясінський. — Київ : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. — 128 с.

У книжці подано необхідний для розв'язування олімпіадних задач теоретичний матеріал з геометричних перетворень, ілюстрований достатньою кількістю

прикладів їх застосування. В окремому розділі пропонуються умови та розв'язання багатьох сучасних олімпіадних задач з використанням окремих геометричних перетворень.

23. Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України 2011–2012 : Навчально-методичний посібник / І. М. Мітельман, В. М. Радченко, М. І. Сумарюк, Г. М. Шевченко, В. А. Ясінський. — Чернівці, 2013. — 136 с.

Подано умови та розв'язання задач учнівських математичних олімпіад, які проводилися в Україні в 2011–2012 навчальному році: IV (заключного) етапу ЛІІ Всеукраїнської олімпіади юних математиків, відбірково-тренувальних зборів команди України, ЛІІІ Міжнародної математичної олімпіади, а також подано деякі матеріали, які використано при підготовці команди України до Міжнародної олімпіади.



24. Ясінський В. А. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Геометрія / В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко. — Вінниця : ТОВ Нілан ЛТД, 2014. — 224 с.

В посібнику описано деякі методи розв'язування геометричних задач олімпіадного характеру та наведено добірку задач республіканських і Міжнародних математичних олімпіад, що проводились у 2012 та 2013 роках. Усі запропоновані задачі супроводжуються повним розв'язанням. Посібник призначений для вчителів математики, учнів загальноосвітніх шкіл, студентів педагогічних університетів, які навчаються за спеціальністю «Математика», та всіх, хто цікавиться елементарною геометрією.

25. Ясінський В. А. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра / В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко. — Вінниця : ТОВ Нілан ЛТД, 2015. — 272 с.

У посібнику описано вибрані методи розв'язування різних алгебраїчних задач олімпіадного характеру. Теоретичний матеріал доповнюється задачами математичних олімпіад, які представлено з повними розв'язаннями.



Книга складається з шести розділів: деякі корисні рівності і тотожності, які використовуються при розв'язуванні олімпіадних задач; деякі новітні технології доведення нерівностей; многочлени на математичних олімпіадах; числові послідовності на математичних олімпіадах; функціональні рівняння на математичних олімпіадах; практикум із розв'язування задач з алгебри, що пропонувалися на національних олімпіадах зарубіжних країн.

Науково-методичні статті, які опубліковані у фахових журналах та збірниках науково-методичних конференцій

1. Ясінський В. А. Поворот вектора на 60° // Матеріали ІІ конференції Соросівських Учителів (20–21 квітня 1996 р., Київ) / В. А. Ясінський. — К. : ISSEP, 1996. — С. 147–150.

2. Ясінський В. А. XXVI Українська олімпіада юних математиків / О. Г. Ганюшкін, В. С. Мазорчук, В. В. Некрашевич, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // У світі математики. — 1996. — Т. 2, вип. 3. — С. 62–76.

3. Ясінський В. А. Принцип крайнього / В. М. Лейфура, В. А. Ясінський // У світі математики. — 1997. — Т. 3, вип. 3. — С. 29–39.

4. Ясінський В. А. XXVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків / В. М. Лейфура, В. С. Мазорчук, В. І. Михайловський, В. В. Некрашевич, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // У світі математики. — 1998. — Т. 4, вип. 3. — С. 59–72.

5. Ясінський В. А. 37-ма Всеукраїнська математична олімпіада / В. М. Лейфура, В. В. Некрашевич, О. Ю. Теплінський, В. А. Ясінський // У світі математики. — 1998. — Т. 4, вип. 1. — С. 70–79.

6. Ясінський В. А. ІІІ етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків 1998 р. / В. О. Борисова, М. С. Добосевич, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // Математика в школі, 1998. — №4. — С. 42–45.

7. Ясінський В. А. XXXVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків / В. М. Лейфура, В. С. Мазорчук, В. І. Михайловський, В. В. Некрашевич, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // Математика в школі, 1998. — №4. — С. 36–42.

8. Ясінський В. А. Методика вивчення полярного перетворення на заняттях математичного гуртка / В. А. Ясінський // Матеріали Всеукраїнської

науково-методичної конференції “Актуальні питання комплексної освіти у спеціалізованих навчальних закладах з підвищеними вимогами до вивчення природничо-математичних дисциплін” (23–27 вересня 1999 року, м. Одеса). — Одеса : “Астропринт”, 1999. — С. 258–264.

9. Ясінський В. А. Конкурс із розв’язування математичних задач / В. О. Швець, В. А. Ясінський // Математика в школі, 1999. — № 1. — С. 45.

10. Ясінський В. А. Про застосування орієнтованої відстані / В. А. Ясінський // Математика в школі, 1999. — №2. — С. 35–37.

11. Ясінський В. А. Про перетин трьох прямих в одній точці та перпендикулярність / В. О. Швець, В. А. Ясінський // Математика в школі, 1999. — №1. — С. 50–51.

12. Ясінський В. А. III етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків 1999 року / М. С. Добосевич, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. В. Некрашевич, В. А. Ясінський // Математика. — № 6(18). — 1999. — С. 1–8.

13. Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції “Сучасний стан і перспективи шкільних курсів математики та інформатики у зв’язку з реформуванням у галузі освіти”. — Дрогобич, 2000. — С. 113–116.

14. Ясінський В. А. Фінал 6-ї Соросівської математичної олімпіади / В. М. Лейфура, В. М. Радченко, О. Ю. Теплінський, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2000, т. 6, вип. 1. — С. 73–81.

15. Ясінський В. А. Поговоримо про потужність множини / В. А. Ясінський, А. І. Воробйова, В. М. Лейфура // У світі математики. — 2000. — т. 6, вип. 1. — С. 11–22.

16. Ясінський В. А. Третій етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2000 року / М. С. Добосевич, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, О. Ю. Теплінський, В. О. Швець, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2000. — т. 6, вип. 1. — С. 66–72.

17. Ясінський В. А. XLI Всеукраїнська олімпіада юних математиків / В. М. Лейфура, В. В. Некрашевич, А. Я. Оленко, В. М. Радченко // У світі математики. — 2000. — т. 7, вип. 2. — С. 64–74.

18. Ясінський В. А. Застосування рівномірного руху до розв’язування планіметричних задач / В. А. Ясінський // Математика в школі. — 2000. — №2. — С. 38–40.

19. Ясінський В. А. ХLI Всеукраїнська олімпіада юних математиків / В. М. Лейфура, В. В. Некрашевич, А. Я. Оленко, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2001. — т. 7, вип. 2. — С. 64–74.
20. Ясінський В. А. Фінал 7-ї Соросівської математичної олімпіади / В. М. Радченко, О. Ю. Теплінський, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2001. — т. 7, вип. 1. — С. 72–82.
21. Ясінський В. А. Третій етап 41-ї Всеукраїнської олімпіади юних математиків / М. С. Добосевич, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, І. П. Нагель, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2001. — т. 7, вип. 1. — С. 65–71.
22. Ясінський В. А. Алгебраїчні методи доведення геометричних нерівностей / В. А. Ясінський, В. М. Лейфура // Матеріали IX Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (16–19 травня 2002 р., Київ). — К. : НТУУ “КПІ”, 2002. — С. 578.
23. Ясінський В. А. Про доведення геометричних нерівностей / В. М. Лейфура, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2002. — т. 8, вип. 2. — С. 51–59.
24. Ясінський В. А. Україна і Міжнародні математичні олімпіади (до десятиріччя першого виступу) / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2002. — т. 8, вип. 2. — С. 75–77.
25. Ясінський В. А. ХLII Всеукраїнська олімпіада юних математиків / О. О. Курченко, В. М. Лейфура, В. М. Радченко, Г. М. Шевченко, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2002. — т. 8, вип. 3. — С. 69–79.
26. Ясінський В. А. LVIII Київська міська олімпіада юних математиків / О. Г. Кукуш, В. М. Лейфура, А. Я. Оленко, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2003. — т. 9, вип. 2. — С. 49–64.
27. Ясінський В. А. Проектування векторів та його застосування до розв’язування геометричних задач / В. А. Ясінський // Математика в школі, 2004. — №2. — С. 52–55.
28. Ясінський В. А. Про деякі корисні математичні формули, які використовуються при розв’язуванні та створенні олімпіадних задач / В. А. Ясінський // Математика в школі. — 2004. — №5. — С. 44–47.
29. Ясінський В. А. Четвертий етап XLIV Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2004 року / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, В. А. Ясінський // Математика в школі. — 2004. — №7. — С. 6–11.
30. Ясінський В. А. Щорічний конкурс з розв’язування математичних задач / В. А. Ясінський // Математика в школі. — 2004. — №7. — С. 29.

31. Ясинський В. А. Новые задачи / В. А. Ясинський // Математика в школе. — 2004. — №4. — С. 56.

32. Ясінський В. А. Числа раціональні та ірраціональні / В. А. Ясінський // Математика в школах України. — 2004. — №7. — С. 12–14.

33. Ясінський В. А. Подвійне відношення / В. А. Ясінський // Математика в школах України. — 2004. — №2. — С. 12–15.

34. Ясінський В. А. Полюс і поляр / В. А. Ясінський // Математика в школах України. — 2004. — №13. — С. 10–13.

35. Ясінський В. А. Третій етап XLIV Всеукраїнської олімпіади юних математиків. 2004 рік / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, В. А. Ясінський // Математика в школах України. — 2004. — №14. — С. 3–9.

36. Ясінський В. А. IV етап Всеукраїнської математичної олімпіади 2004 року / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. А. Ясінський // Математика в школах України. — 2004. — №16. — С. 5–11.

37. Ясінський В. А. IV етап Всеукраїнської учнівської олімпіади 2004 року / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. А. Ясінський // Математика в школах України. — 2004. — №17–18. — С. 2–8.

38. Ясінський В. А. Векторний метод розв'язування задач / В. А. Ясінський // Математика в школах України. — 2004. — №26. — С. 9–13; №27. — С. 11–13.

39. Ясінський В. А. Роздуми про навчання математиці / В. А. Ясінський // Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики : Всеукраїнська наук.-практич. конференція, присвячена 170-річниці НПУ ім. М.П. Драгоманова, 125-й річниці з дня народження проф. О.М. Астряба, 70-й річниці фіз.-мат. фак-ту: Тези доповідей (6 жовтня 2004 р.). — Київ : НПУ, 2004. — С. 207–208.

40. Ясінський В. А. Про один аналог нерівності Коші–Буняковського: (профільне навчання) / В. А. Ясінський, В. М. Лейфура // Математика в школі. — 2005. — №1. — С. 47–51.

41. Ясінський В. А. Методика розв'язування олімпіадних задач, пов'язаних з показниковими та степеневими показниковими діофантовими рівняннями / М. В. Миронюк, В. А. Ясінський // Математика в школі. — 2005. — №3. — С. 47–50.

42. Ясінський В. А. VII Всеукраїнський турнір юних математиків / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // Математика в школі. — 2005. — №4. — С. 15–20.

43. Ясінський В. А. Метод нескінченного спуску в олімпіадних задачах з теорії чисел / В. А. Ясінський // Математика в школі. — 2005. — №5. — С. 49–52.

44. Ясінський В. А. Геометрія шестикутника на математичних олімпіадах / В. А. Ясінський, О. Л. Коношевський // Математика в школі. — 2005. — № 7. — С. 35–43.
45. Ясінський В. А. IV етап XLV Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2005 р. / О. Литвиненко, В. Лейфура, В. Ясінський // Математика в школі. — 2005. — № 8. — С. 5–10.
46. Ясінський В. А. Метод біноміальних перетворень при розв'язуванні показникових рівнянь у цілих числах. / В. А. Ясінський // Математика в школі. — 2005. — №9. — С. 46–53.
47. Ясінський В. А. Відбірково-тренувальні збори кандидатів до команди України на Міжнародну математичну олімпіаду 2005 р. / В. Лейфура, О. Литвиненко, В. Ясінський // Математика в школі. — 2005. — № 10. — С. 6–13.
48. Ясінський В. А. Про прямі, що проходять через основні точки трикутника / В. А. Ясінський // Математика в школах України. — 2005. — №9 (93). — С. 10–12.
49. Ясінський В. А. VII Всеукраїнський турнір юних математиків / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // У світі математики. — № 1. — 2005.- С. 88–96.
50. Ясінський В. А. VII Всеукраїнський турнір юних математиків В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // Математика. — № 1(301). — 2005.- С. 1–3, 9.
51. Ясінський В. А. XLVI Всеукраїнська олімпіада юних математиків / О. О. Литвиненко, І. М. Мітельман, М. О. Перестюк, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // Математика в школі. — № 5. — 2006. — С. 12–21.
52. Ясінський В. А. Новітні технології доведення нерівностей многочленів з трьома змінними. / В. А. Ясінський // Математика в школі. — №8. — 2006. — С. 26–32.
53. Ясінський В. А. VIII Всеукраїнський турнір юних математиків / В. М. Лейфура, О. О. Литвиненко, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // Математика в школі. — №8. — 2006. — С. 20–24.
54. Ясінський В. А., Відбірково-тренувальні збори з формування команди України на Міжнародну математичну олімпіаду 2006 року / В. М. Лейфура, О. О. Литвиненко, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, О. Ю. Теплінський, В. А. Ясінський // Математика в школі. — № 9. — 2006. — С. 2–7.
55. Ясінський В. А. Методика розв'язування раціональних рівнянь четвертого степеня. / В. А. Ясінський, М. В. Мельник // Математика в школі. — №10. — 2006. — С. 39–44.

56. Ясінський В. А. Вибрані задачі для вчителів та учнів / В. А. Ясінський // Математика в школах України. — 2006. — №22-24. — С. 123–125.

57. Ясінський В. А. 46 Всеукраїнська олімпіада юних математиків / О. О. Литвиненко, І. М. Мітельман, М. О. Перестюк, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // Математика. — № 24. — 2006. — С. 3–15.

58. Ясінський В. А. VIII Всеукраїнський турнір юних математиків В. М. Лейфура, О. О. Литвиненко, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // Математика. — №8(356). — 2006.; №29-30 (377-378). — С. 25–28.

59. Ясінський В. А. Формування команди України на Міжнародну математичну олімпіаду 2006 р. (тренувально-відбірні збори) / В. М. Лейфура, О. О. Литвиненко, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, О. Ю. Теплінський, В. А. Ясінський // Математика. — №29-30(377-378). — 2006. — С. 16–24.

60. Ясінський В. А. VIII Всеукраїнський турнір юних математиків / В. М. Лейфура, О. О. Литвиненко, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // У світі математики. — 1(2006), С. 46-53, 2(2006), С. 54–59.

61. Ясінський В. А. Відбірково-тренувальні збори з формування команди України на Міжнародну математичну олімпіаду 2006 року / В. М. Лейфура, О. О. Литвиненко, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, О. Ю. Теплінський, В. А. Ясінський // У світі математики. — 3 (2006). — С. 73-84.

62. Ясінський В. А. 46-та Всеукраїнська олімпіада юних математиків / І. М. Мітельман, М. О. Перестюк, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2 (2006), С. 60-74.

63. Ясінський В. А. IX Всеукраїнський турнір юних математиків / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // Математика в школі. — №4. — 2007. — С. 37-43.

64. Ясінський В. А. Теорема Ван-Обеля та її застосування при розв'язуванні планіметричних задач. / В. А. Ясінський, Л. Ф. Михайленко // Математика в школі. — №9-10, 2007. — С. 41–47.

65. Ясінський В. А. Геометричні нерівності на математичних олімпіадах. / В. А. Ясінський // Математика в школі. — №9. — 2007. — С. 44–53.

66. Ясінський В. А. Математичні олімпіади як складова частина системи роботи з математично обдарованими учнями / В. М. Лейфура, В. А. Ясінський // Математична освіта в Україні: Міжнародна науково-практична конференція, присвячена 60-й річниці кафедри математики і методики викладання математики: тези доповідей (16–18 жовтня 2007 р., м. Київ) / М-во освіти і науки України, НПУ ім. М. П. Драгоманова. — Київ : НПУ, 2007. — С. 204–205.

- 67.** Ясінський В. А. IX Всеукраїнський турнір юних математиків / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // Математика. — №12(412). — 2007.- С. 1-10.
- 68.** Ясінський В. А. IX Всеукраїнський турнір юних математиків. / В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // У світі математики. — 1 (2007), С. 57-63; 2 (2007), С. 56-61.
- 69.** Ясінський В. А. Симетрія відносно кола, або інверсія. / В. А. Ясінський, А. Л. Воевода // Математика в школі. — №9. — 2008. — С. 33 — 38.
- 70.** Ясінський В. А. Властивості точок Брокара та розв'язання олімпіадних задач з геометрії трикутника. / В. А. Ясінський, В. А. Яківець // Наша школа. — №3. — 2008. — С. 54–58.
- 71.** Ясінський В. А. Тригонометричні підстановки на математичних олімпіадах / В. А. Ясінський // Математика в школі. — №10-11-12, 2008. — С. 52–54, 47–52.
- 72.** Ясінський В. А. Районні олімпіади юних математиків 2007–2008 навчального року у Вінницькій області / В. А. Ясінський // У світі математики. — 2008. — Том 14, №1. — С. 58–67.
- 73.** Ясінський В. А. Теорія лишків та її застосування до розв'язування олімпіадних задач. / В. А. Ясінський // Математика в школі. — №1. — 2009. — С. 35–40.
- 74.** Ясінський В. А. Теорема Чезаро-Штольца та її використання на математичних олімпіадах / В. А. Ясінський, Р. П. Ушаков // Математика в школі. — №3. — 2009. — С. 39–45.
- 75.** Ясінський В. А. Принцип Штурма та його використання при розв'язуванні олімпіадних екстремальних задач / В. А. Ясінський, Л. Й. Наконечна // Математика в школі. — №9. — 2009. — С. 33–40.
- 76.** Ясінський В. А. Системи лінійних конгруенцій та китайська теорема про остачі в задачах математичних олімпіад / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. А. Ясінський // Наша школа. — №6. — 2009. — С. 17–32.
- 77.** Ясінський В. А. Система опорних задач про метричні співвідношення для дотичних кіл та їх використання для розв'язування олімпіадних задач. / В. А. Ясінський // Збірник тез Всеукраїнської науково-методичної конференції «Стан та перспективи підготовки вчителя математики в Україні», Вінниця, ВДПУ, 2009. — С. 35–36.
- 78.** Ясінський В. А. Про використання гармонічних четвірок точок і прямих при розв'язуванні планіметричних задач на математичних олімпіадах. / В. А. Ясінський // Математика в школі. — №1-2. — 2010. — С. 35–48.

79. Ясінський В. А. Теорема Тьопліца та її використання на математичних олімпіадах і турнірах. / В. А. Ясінський, Р. П. Ушаков // Математика в школі. — №6. — 2010. — С. 40–45.

80. Ясінський В. А. XIII Всеукраїнський турнір юних математиків / В. О. Борисова, О. О. Курченко, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // Математика в школі. — № 5. — 2010. — С. 39–41.

81. Ясінський В. А. XII Всеукраїнський турнір юних математиків. Частина I / В. М. Лейфура, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2010. — №1. — С. 31–41.

82. Ясінський В. А. XII Всеукраїнський турнір юних математиків. Частина 2 / В. М. Лейфура, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2010. — №2. — С. 63–70.

83. Ясінський В. А. Системи лінійних конгруенцій та китайська теорема про остачі в задачах математичних олімпіад / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. А. Ясінський // Математика. — № 9 (549). — 2010. — С. 10–17; № 10(550). — С. 16–23.

84. Ясінський В. А. Система опорних задач про метричні співвідношення для дотичних кіл та їх використання при розв'язуванні олімпіадних задач / В. А. Ясінський // Математика в школі. — 2011. — №3. — С. 45–48.

85. Ясінський В. А. Заключний етап XIII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка / В. О. Борисова, О. О. Курченко, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // Математика в школі. — 2011. — №6. — С. 29–36.

86. Ясінський В. А. Заклучний етап XIII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка (закінчення) / В. О. Борисова, О. О. Курченко, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // Математика в школі. — 2011. — №7–8. — С. 29–36.

87. Ясінський В. А. XIII Всеукраїнський турнір юних математиків / В. О. Борисова, О. О. Курченко, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2011. — № 1. — С. 42–59.

88. Ясінський В. А. Лема для нерівностей з радикалами / В. А. Ясінський // Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: Міжнар. наук.-практ. конференція до 80-річчя з дня народження доктора пед. наук, проф. З.І. Слєпкань: тези доповідей 11–13 травня 2011 р. / редкол. В. П. Андрущенко — К. : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. — С. 252–253.

89. Ясінський В. А. Лема для нерівностей з радикалами / В. А. Ясінський // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені

М. П. Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі : збірник / М-во освіти і науки, молоді та спорту України, Нац. пед. Ун-т ім. М. П. Драгоманова. — К. : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. — Вип. 8 : Ювілейний випуск з нагоди 80-річчя з дня народження доктора педагогічних наук, професора З. І. Слєпкань. — С. 148–150.

90. Ясінський В. А. XIII Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М. Й. Ядренка / В. О. Борисова, О. О. Курченко, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, В. А. Ясінський // Математика. — №8. — 2011. — С. 3–18.

91. Ясінський В. А. Про один метод знаходження границі числової послідовності. / В. А. Ясінський, Р. П. Ушаков // Математика в сучасній школі. — №4. — 2012. — С. 36–42.

92. Ясінський В. А., XIV Всеукраїнський турнір юних математиків імені М. Й. Ядренка / О. Г. Кукуш, І. М. Мітельман, О. Н. Нестеренко, К. В. Рабець, І. В. Федак, В. А. Ясінський // Математика в сучасній школі. — №6. — 2012. — С. 29–39.

93. Ясінський В. А. LII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики / І. М. Мітельман, В. М. Радченко, Г. М. Шевченко, В. А. Ясінський // Математика в сучасній школі. — №6, 7–8. — 2012. — С. 40–46, 48–51.

94. Ясінський В. А. Опорні задачі-факти олімпіадної геометрії. / В. А. Ясінський, О. Л. Коношевський // Математика в сучасній школі. — №9. — 2012. — С. 28–34.

95. Ясінський В. А. XIV Всеукраїнський турнір юних математиків / О. Г. Кукуш, І. М. Мітельман, О. Н. Нестеренко, К. В. Рабець, І. В. Федак, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2012. — №1. — С. 41–60.

96. Ясінський В. А. Обласні олімпіади з математики 2012 р. / В. М. Радченко, Г. М. Шевченко, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2012. — №1. — С. 61–76.

97. Ясінський В. А. Завдання LII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики / І. М. Мітельман, В. М. Радченко, Г. М. Шевченко, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2012. — №2. — С. 58–74.

98. Ясінський В. А. XIV Всеукраїнський турнір юних математиків імені М. Й. Ядренка / О. Г. Кукуш, І. М. Мітельман, О. Н. Нестеренко, К. В. Рабець, І. В. Федак, В. А. Ясінський // Математика. — №14–15. — 2012. — С. 18–35.

99. Ясінський В. А. Завдання LII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики / І. М. Мітельман, В. М. Радченко, Г. М. Шевченко, В. А. Ясінський // Математика. — №17–18. — 2012. — С. 5–20.

100. Ясінський В. А. Системы линейных уравнений и китайская теорема об остатках в задачах математических олимпиад / В. Лейфура, И. Мительман, В. Ясинский // Математическое образование. — №1–2 (65–66). — 2013. — С. 37–58.

101. Ясінський В. А. Завдання третього етапу ЛІІІ Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики / І. М. Мітельман, В. М. Радченко, Г. М. Шевченко, В. А. Ясінський // Математика в сучасній школі. — №3. — 2013. — С. 34–42.

102. Ясінський В. А. XV Всеукраїнський турнір юних математиків: завдання та їх розв'язання / Олександр Кукуш, Ігор Мітельман, Катерина Рабець, Іван Федак, В'ячеслав Ясінський // Математика в сучасній школі. — 2013. — №6. — С. 35–45.

103. Ясінський В. А. XV Всеукраїнський турнір юних математиків: (завдання та їх розв'язання) / Олександр Кукуш, Ігор Мітельман, Катерина Рабець, Іван Федак, В'ячеслав Ясінський // Математика в сучасній школі. — 2013. — №7/8. — С. 49–53.

104. Ясінський В. А. Завдання IV етапу ЛІІ Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики / І. М. Мітельман, В. М. Радченко, Д. І. Скороходов, Г. М. Шевченко, В. А. Ясінський // Математика в сучасній школі. — №10. — 2013. — С. 33–38.

105. Ясінський В. А. Завдання третього етапу ЛІІІ Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики / Ігор Мітельман, Вадим Радченко, Георгій Шевченко, В'ячеслав Ясінський // Математика. — 2013. — №8. — С. 3–12.

106. Ясінський В. А. XV Всеукраїнський турнір юних математиків. Завдання та їх розв'язання / О. Г. Кукуш, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, І. В. Федак, В. А. Ясінський // Математика. — №12. — 2013. — С. 3–20.

107. Ясінський В. А. Завдання IV етапу ЛІІІ Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики / І. М. Мітельман, В. М. Радченко, Д. С. Скороходов, Г. М. Шевченко, В. А. Ясінський // Математика. — №20. — 2013. — С. 3–19.

108. Ясінський В. А. XV Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М. Й. Ядренка / О. Г. Кукуш, І. М. Мітельман, К. В. Рабець, І. В. Федак, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2013. — №1. — С. 46–52.

109. Ясінський В. А. Завдання третього етапу ЛІІІ Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики / І. М. Мітельман, В. М. Радченко, Г. М. Шевченко, В. А. Ясінський // У світі математики. — №1. — 2013. — С. 53–69.

110. Ясінський В. А. XVI Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М. Й. Ядренка / О. Г. Кукуш, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський // У світі математики. — №4. — 2013. — С. 58–64.

111. Ясінський В. А. Знайомство із симедіаною трикутника / В. Ясінський, І. Нагель // Математика в рідній школі. — 2014. — №7/8. — С. 23–29.

112. Ясінський В. А. Використання векторів-точок у розв'язуваннях планіметричних олімпіадних задач / В. Петечук, В. Ясінський // Математика в рідній школі. — 2014. — №11. — С. 39–46.

113. Ясінський В. А. Реверсна техніка розв'язування олімпіадних задач з математики / В. А. Ясінський // Математика в рідній школі — 2014. — №12. — С. 44–49.

114. Ясінський В. А. Вибрані задачі XVI Всеукраїнського турніру юних математиків / О. Г. Кукуш, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, І. В. Федак, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2014. — №1. — С. 53–64.

115. Ясінський В. А. XVII Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М. Й. Ядренка / О. Г. Кукуш, І. М. Мітельман, Д. Ю. Мітін, В. М. Радченко, С. В. Слободянюк, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2014. — Т. 20, №4. — С. 54–58.

116. Ясінський В. А. XVII Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М. Й. Ядренка / О. Г. Кукуш, І. М. Мітельман, Д. Ю. Мітін, В. М. Радченко, С. В. Слободянюк, В. А. Ясінський // У світі математики. — № 4. — 2014. — С. 54–58.

117. Ясінський В. А. Про доведення геометричних нерівностей за допомогою алгебраїчних / В. М. Лейфура, В. А. Ясінський // У світі математики. — 2015. — Т. 21, №4. — С. 21–29.

Світлій пам'яті В'ячеслава Андрійовича Ясінського¹...

5 листопада 2015 року перестало битися серце В'ячеслава Андрійовича Ясінського — відомого математика та ушавленого педагога, заслуженого вчителя України, автора численних олімпіадних задач з математики, багатьох книжок та статей, доцента Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

У його особі математична спільнота та освітяни втратили непересічну особистість, усебічно обдаровану людину, істинного Вчителя й відданого друга. Життєвий шлях В'ячеслава Андрійовича — це вірець гідності, творчого горіння, вміння знаходити таланти і сприяти їхньому розквіту.

В'ячеслав Андрійович Ясінський народився 31 січня 1957 р. у с. Чернівці Могилів-Подільського району Вінницької області. У 1974 р. закінчив Чернівцьку СШ №1 і вступив до Мазурівського СПТУ №17, яке закінчив у 1975 р. за спеціальністю тракторист-комбайнер широкого профілю. Того ж року зарахований на І курс фізико-математичного факультету Вінницького державного педагогічного інституту імені Миколи Островського, який закінчив з відзнакою в 1979 р.

Трудову діяльність розпочав у СШ №1 м. Могилів-Подільський, згодом перейшов до вінницької СШ №15. З 1983 р. працював у Вінницькому державному педагогічному університеті, де пройшов шлях від асистента до доцента.

За сумісництвом понад 20 років викладав у вінницьких середніх школах №15 та №18, фізико-математичній гімназії №17, у ліцеї №7, читав лекції у Вінницькій академії неперервної освіти.

З 1991 р. В. А. Ясінський був членом журі, пізніше — експертом-консультантом, заступником голови журі Всеукраїнської олімпіади юних математиків, а з 1998 р. — членом журі й експертом-консультантом Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка.

У часи проведення українських Соросівських олімпіад з математики (1995–2001) В. А. Ясінський — постійний член журі цих престижних змагань. Також він працював і в складі журі Всеукраїнських олімпіад для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів, очолював математичні олімпіади рідної Вінниччини.

¹Некролог в пам'ять про В. А. Ясінського був опублікований у кількох виданнях, зокрема в журналах «Математика в рідній школі» (№12, 2015, С. 47–48) та «У світі математики» (№4, 2015, С. 1–3).

Авторитет В'ячеслава Андрійовича був безмежним — його неперевершені професійні якості прикрашали будь-який захід для математично обдарованої молоді.

Варто відзначити, що науково-методичне забезпечення вітчизняних математичних змагань для обдарованих учнів значною мірою визначається творчістю В. А. Ясінського як автора яскравих задач та незамінного фахівця з формування комплектів завдань. Серед вітчизняних авторів олімпіадних задач В'ячеслав Андрійович був безсумнівним лідером, визнаним далеко за межами України — усім математичним олімпіадним світом. Він є першим українським педагогом-математиком, чії задачі були представлені на Міжнародних математичних олімпіадах (у 1998 та 2002 рр.). Окрім того, неодноразово його задачі входили до ShortList'ів — списків задач, з яких журі Міжнародних математичних олімпіад обирало шість задач для проведення змагання. Його задачі прикрашали завдання відбіркового та фінального етапів олімпіади з геометрії імені І. Ф. Шаригіна, відкритих математичних олімпіад і фестивалів Рішельєвського ліцею, вінницького «Турніру чемпіонів» тощо.

В. А. Ясінський не лише вмів створювати оригінальні задачі всіх рівнів складності, але й сам блискуче розв'язував складні олімпіадні задачі. Ще в шкільні роки він з успіхом брав участь у математичних олімпіадах різних рівнів — від шкільних до Всесоюзної. Пізніше був неодноразовим переможцем авторитетних конкурсів всесоюзного журналу «Математика в школі» для вчителів із розв'язування задач.

З 1993 р. по 2006 р. на запрошення Міністерства освіти і науки України В. А. Ясінський постійно брав участь у відборах і науковій підготовці збірної команди України до Міжнародних математичних олімпіад. Він безпосередньо підготував чимало переможців Всесоюзних і Всеукраїнських олімпіад. Зокрема, його вихованець Павло Пилявський є чотириразовим переможцем Міжнародних математичних олімпіад (бронзова медаль 1996 р., срібна медаль 1997 р. і золоті медалі 1998 р. та 1999 р.).

В. А. Ясінський — автор багатьох науково-методичних праць, присвячених підготовці учнів і студентів до математичних змагань. Зокрема, співавтор книжок: «Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування» (1998), «Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000», «Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006», рекомендованих МОН України як навчально-методичні посібники. Відзначимо також великі цикли статей В. А. Ясінського в журналах «Математика в школі», «У світі математики», «Математика в рідній школі», «Математика в школах України», присвячених методиці та практиці розв'язування олімпіадних задач. Його останні книжки «Секрети підготовки до Всеукраїнських та Міжнародних

олімпіад. Геометрія» (2014) та «Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра» (2015), написані у співавторстві з О. Б. Панасенком, містять надзвичайно змістовний матеріал, яким узагальнюються методичні підходи до роботи з майбутніми переможцями олімпіад.

В. А. Ясінський був членом редколегії журналу для школярів «У світі математики» з моменту його заснування в 1995 р., одним із ведучих розділу розв'язування задач журналу «Математика в школі».

За вагомий внесок у розвиток обдарованої молоді заслужений вчитель України В. А. Ясінський був також нагороджений знаками «Відмінник народної освіти УРСР», «Відмінник освіти України», почесними грамотами МОН України, іншими відзнаками. Мешканці Вінниці вшанували його званням «Людина року-2000» в номінації «Працівник освіти».

В. А. Ясінський представлений у Книзі Педагогічної Слави України.

Ім'я В'ячеслава Андрійовича Ясінського — інтелігентної, щирої та чуйної людини, видатного композитора математичних задач, незрівнянного викладача — назавжди залишиться у вдячній пам'яті колег, друзів, учнів, студентів, учителів.

*В. В. Атамась, В. О. Борисова, А. І. Воробйова,
М. Ф. Городній, Л. В. Гунько, М. С. Добосевич,
Б. Г. Кременський, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко,
О. О. Литвиненко, О. І. Матяш,
В. І. Михайловський, І. М. Мітельман,
І. П. Нагель, О. Н. Нестеренко, В. М. Петечук,
О. Б. Панасенко, М. О. Перестюк, О. В. Поляков,
М. В. Працьовитий, К. В. Рабець, В. М. Радченко,
М. М. Рожкова, О. З. Рябуха, І. С. Соколовська,
О. Ю. Теплінський, О. К. Толтиго, Р. П. Ушаков,
І. В. Федак, Л. І. Філософ, О. Ю. Харік, Д. І. Хілько,
С. П. Шаповалов, В. О. Швець, Г. М. Шевченко...*

Зміст

Передмова	3
<i>В'ячеслав Ясінський. Тернистий шлях олімпіад</i>	4
Спогади про В. А. Ясінського	7
<i>Катерина Ясінська. Життєпис В'ячеслава Андрійовича Ясінського</i> ...	7
<i>Павло Пулявський. В'ячеславу Андрійовичу Ясінському, з довічною шаною, подякою та любов'ю</i>	24
<i>Спогади друзів — колег по співпраці на математичних олімпіадах</i>	29
<i>Спогади друзів — колег по кафедрі</i>	40
<i>Спогади друзів — колег з університету</i>	59
<i>Спогади друзів та учнів В'ячеслава Андрійовича</i>	66
Задачі В. А. Ясінського	77
Задачі IV етапу Всеукраїнської олімпіади з математики	78
Задачі Міжнародних математичних олімпіад	100
Задачі олімпіади з геометрії імені І. Ф. Шарігіна	101
Задачі Соросівських олімпіад	104
Задачі відкритих олімпіад Рішельєвського ліцею	123
Задачі комплексної олімпіади з математики, фізики, інформатики «Турнір чемпіонів»	126
Задачі, опубліковані в журналі «У світі математики»	130
Задачі, опубліковані в журналі «Математика в школі»	145
Вибрані задачі В. А. Ясінського	148
Вибрані публікації В. А. Ясінського	154
<i>В'ячеслав Ясінський. Реверсна техніка розв'язування олімпіадних задач із математики</i>	154
<i>В'ячеслав Ясінський. Метод біноміальних перетворень при розв'язуванні показникових рівнянь у цілих числах</i>	168
<i>В'ячеслав Ясінський. Метод нескінченного спуску в олімпіадних задачах з теорії чисел</i>	182
<i>В'ячеслав Ясінський. Теорія лишків та її застосування до розв'язування олімпіадних задач</i>	188

<i>В'ячеслав Ясінський.</i> Новітні технології доведення нерівностей многочленів з трьома змінними	201
<i>В'ячеслав Ясінський.</i> Застосування рівномірного руху до розв'язування планіметричних задач	216
<i>В'ячеслав Ясінський.</i> Про застосування орієнтованої відстані	223
Список публікацій В. А. Ясінського.....	227
Навчальні та навчально-методичні посібники	227
Науково-методичні статті, які опубліковані у фахових журналах та збірниках науково-методичних конференцій	235
Світлій пам'яті В'ячеслава Андрійовича Ясінського...	246

З любов'ю до людей та математики...

До 60-річчя від дня народження
Ясінського В'ячеслава Андрійовича

Підписано до друку 17.01.2017

Формат 70x100/8. Папір офсетний

Друк цифровий. Гарнітура Computer Modern.

Умовн. друк. арк. 35,5. Обл.-вид. арк. 33,01.

Наклад 100 прим.

Віддруковано з оригіналів замовника.

Видавець та виготовлювач ТОВ «Нілан-ЛТД»

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції серія ДК №4299 від 11.04.2012 р.

21027, а/с 8825, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 21.

Тел.: (0432) 69-67-69, 603-000.

E-mail: info@tvoru.com.ua, <http://www.tvoru.com.ua>